STRUKTUR– UND ERGODENTHEORIE IRREDUZIBLER OPERATOREN AUF BANACHVERBÄNDEN

DISSERTATION

Der Mathematischen Fakultät
der Eberhard - Karls - Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

DETLEF AXMANN
aus Korbach

1980

STRUKTUR– UND ERGODENTHEORIE IRREDUZIBLER OPERATOREN AUF BANACHVERBÄNDEN

DISSERTATION

Der Mathematischen Fakultät
der Eberhard - Karls - Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

DETLEF AXMANN

aus Korbach

1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 3. Juli 1980

Dekan	:	Prof. Dr. M. Wolff
1. Berichterstatter	:	Prof. Dr. R. Nagel
2. Berichterstatter	:	Prof. Dr. H. P. Lotz

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

1. Bezeichnungen, Vorbemerkungen und Aussagen über die Orthogonalität von Operatoren 5

2. T^n-Ideale eines irreduziblen, positiven Operators 19

3. Harris-Operatoren 44

4. Mittelergodische und gleichmäßig mittelergodische Operatoren 65

Literaturverzeichnis 98

EINLEITUNG

In der Ergodentheorie sind funktionalanalytische Betrachtungsweisen weit verbreitet. Um zum Beispiel die durch eine Abbildung φ in einer Menge X erzeugte Strömung $(\varphi^n)_{n\geq o}$ zu untersuchen, wird die Wirkung von $(\varphi^n)_{n\geq o}$ auf der Menge $\mathcal{F}(X)$ der Funktionen auf X bebeschrieben. Die Abbildung φ erklärt nämlich durch $T_\varphi f(t) = f(\varphi(t))$, $f \in \mathcal{F}(X)$, einen linearen Operator T_φ . Das Verhalten von $(T_\varphi^n)_{n\geq o}$ gibt asymptotische Eigenschaften von $(\varphi^n)_{n\geq o}$ wieder - etwa Wiederkehr-, Mittelwert- oder Mischungseigenschaften. Dabei genügt es, die Wirkung von T_φ auf verschiedene, den jeweiligen Fragestellungen angemessene Teilräume von $\mathcal{F}(X)$ einzuschränken: unter geeigneten Annahmen über φ und X läßt T_φ ausgezeichnete Funktionenräume invariant. Trägt X eine Topologie $\mathcal{T}$, bezüglich der φ stetig ist, so bildet T die Menge $C_b(X)$ der beschränkten, $\mathcal{T}$-stetigen Funktionen auf X in sich ab. Ebenso gilt $T_\varphi(\mathcal{L}^p(X,\alpha,\mu)) \subset \mathcal{L}^p(X,\alpha,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, falls φ bezüglich einer σ-Algebra α-α-meßbar ist und das Maß μ auf (X,α) festläßt. Deshalb kann T_φ als linearer Operator auf $L^p(X,\alpha,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, betrachtet werden.

Nun sind $C_b(X)$ und $L^p(X,\alpha,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, nicht nur (in natürlicher Weise) Banachräume, sondern auch Banachverbände, und T_φ ist ein positiver Operator, sogar ein Verbandshomomorphismus.

Mit Hilfe geeigneter positiver Operatoren auf passend gewählten Banachverbänden läßt sich außerdem das ergodische Verhalten eines Markoffprozesses darstellen. Sei ein solcher Prozeß gegeben durch eine Übergangswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}$ auf einem Zustandsraum $(X,\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf der Menge X. Dann erklärt $\mathcal{P}$ sowohl auf dem Banachverband $B(X,\mathcal{A})$ aller $\mathcal{A}$-meßbaren, beschränkten Funktionen auf X als auch auf dem Banachverband $ca(X,\mathcal{A})$ aller abzählbar additiven, beschränkten Maße auf $(X,\mathcal{A})$ jeweils positive Operatoren $T_{\mathcal{P}}$ beziehungsweise $T_{\mathcal{P}}'$ (siehe Seite 78).

Daher bildet die Theorie der Banachverbände und der positiven Operatoren die Grundlage für eine allgemeine funktionalanalytische Behandlung vieler Fragen aus der Ergodentheorie.

In dieser Arbeit werden insbesondere Struktureigenschaften irreduzibler, positiver Operatoren bestimmt und anschließend auf die Ergodentheorie angewendet.

Zunächst zum Aufbau der Arbeit:

1. Neben grundsätzlichen Bemerkungen enthält der erste Abschnitt Hilfssätze über die Orthogonalität von Radonmaßen und Operatoren. In diesem Zusammenhang wird ein Ergebnis von Foguel ([9], Theorem 2) allgemeiner formuliert (1.8) und eine Anwendung auf irreduzible Verbandsisomorphismen gegeben (1.9).

2. Ein Struktursatz (2.4) über die T^n-Ideale eines irreduziblen, positiven Operators T auf einem Banach-

verband E zeigt, daß E die ordnungsdirekte Summe von $p(n)$ minimalen T^n-Idealen ist, $n \in \mathbb{N}$. Diese werden unter T zyklisch vertauscht. Zusätzlich bilden sie die Bausteine jedes weiteren T^n-Ideals (2.5).

Anwendungen hiervon führen zu Aussagen über die Orthogonalität der Potenzen von T ((2.13), (2.14), (2.16)), über das Spektrum von T ((2.17), (2.19), (2.20)) sowie über irreduzible Verbandsisomorphismen ((2.10) und (2.16)).

Dazu erweist sich der Begriff der 'Zyklengrenze' als nützlich. Er bezeichnet, falls die Folge $(p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, die natürliche Zahl $\sup_{n\in\mathbb{N}} p(n)$.

3. In diesem Abschnitt wird nachgewiesen: ein irreduzibler, positiver Kernoperator, allgemeiner, ein irreduzibler, positiver Harris-Operator T auf einem Banachverband mit ordnungsstetiger Norm besitzt nicht nur einen positiven Spektralradius (3.8), sondern für ihn existiert auch die Zyklengrenze p (3.6), da seine Potenzen nicht paarweise senkrecht aufeinander stehen (3.5). Außerdem enthält unter der hier häufig vorausgesetzten Bedingung '$F^s(T)_+ = F(T)_+$' (über den positiven Super-Fixraum und den positiven Fixraum von T, siehe Seite 6) das unimodulare Punktspektrum von T höchstens die p-ten Einheitswurzeln (3.8). Diese Aussage läßt sich für Kernoperatoren verallgemeinern (3.12).

4. Die Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte ermöglichen es nun, das Konvergenzverhalten der Potenzen eines irreduziblen, positiven Operators zu beschreiben ((4.1, 4.2)).

Eine Übersicht über gleichmäßig mittelergodische und quasi-kompakte Operatoren erläutert dann insbesondere die Beziehungen solcher Operatoren zu den Begriffen und Aussagen der Abschnitte 2 und 3 .

Der abschließende Teil der Arbeit behandelt die Frage, unter welchen Bedingungen an einen Operator T aus der Mittelergodizität schon die gleichmäßige Mittelergodizität folgt. Er vereinheitlicht und verallgemeinert in (4.7) und (4.9) Ergebnisse und Beweise von Ando [1], Horowitz [13] und Lin [19] .

Professor Dr. Rainer Nagel hat mich zu dieser Arbeit angeregt und während ihrer Ausführung betreut.

1. BEZEICHNUNGEN, VORBEMERKUNGEN UND AUSSAGEN ÜBER DIE ORTHOGONALITÄT VON OPERATOREN

Die im folgenden nicht erklärten Begriffe und Bezeichnungen entnehme ich dem Buch 'Banach Lattices and Positive Operators' von H. H. Schaefer, hier zitiert mit [S]. Viele der nun angeführten Bemerkungen und Vereinbarungen werden im Verlauf der Arbeit meist ohne Rückverweis benutzt.

Ein Banachverband E $(\neq\{0\})$ ist immer als die Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}}$ eines reellen Banachverbandes $E_{\mathbb{R}}$ zu verstehen. Lineare Operatoren, kurz Operatoren (bzw. Linearformen auf E) werden aufgefaßt als (eindeutig bestimmte) $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzungen von $\mathbb{R}$-linearen Operatoren (bzw. reellen Linearformen) ([S], II.11, IV.1). Somit beziehen sich spektraltheoretische Aussagen auf $E_{\mathbb{C}}$, verbandstheoretische auf $E_{\mathbb{R}}$.

Sei E ein (reeller oder komplexer) Banachraum und und $T \in \mathscr{L}(E)$. Der <u>Fixraum</u> $\{x \in E: Tx = x\}$ wird mit $F(T)$ abgekürzt. Für einen Banachverband E bezeichnet $F^s(T)_+$ den positiven <u>Super-Fixraum</u> $\{x \in E_+: Tx \geq x\}$ und $F_s(T)_+$ den positiven <u>Sub-Fixraum</u> $\{x \in E_+: Tx \leq x\}$. Aus $0 \leq T$ und $F^s(T)_+ = F(T)_+$ $(= F(T) \cap E_+)$ folgt immer $F^s(T^n)_+ = F(T^n)_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$: sei hierzu $0 \leq x \leq T^n x$ für ein $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $0 \leq y \leq Ty$, also $Ty = y$ für $y = \sum_{0 \leq m \leq n-1} T^m x$. Dies liefert $T^n x = x$. Eine entsprechende Aussage gilt für den positiven Sub-Fixraum.

Für Aussagen über das periphere Spektrum eines positiven Operators T ist häufig die folgende Eigenschaft von T wesentlich: der Betrag eines Eigenvektors zu einem unimodularen Eigenwert ist ein T-Fixvektor, das heißt, aus $Tx = \alpha x$, $0 \neq x \in E$ und $|\alpha| = 1$ folgt $T|x| = |x|$ (Die Normierung des Spektralradius $r(T)$ auf 1 stellt dabei keine Einschränkung dar.). Die für diese Eigenschaft hinreichende Bedingung '$F^s(T)_+ = F(T)_+$' setzen viele der hier aufgeführten Aussagen voraus. Sie besagt insbesondere, daß der Fixraum $F(T)$ ein linearer Teilverband in E ist.

In den anschließenden Fällen stimmt $F^s(T)_+$ immer mit $F(T)_+$ überein:

(a) Der positive Sub-Fixraum $F_s(T')_+$ der Adjungierten T' enthält eine strikt positive Linearform.

(b) Die Norm auf E ist streng monoton, und T ist eine Kontraktion.

(Banachverbände vom Typ $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, besitzen streng monotone Norm).

Die Bedingung (a) läßt sich anwenden auf einen irreduziblen, positiven Operator $T \in \mathcal{L}(E)$, für den neben $r(T) = 1$ noch die Wachstumsbedingung (G) gilt. Dabei wird T - wie üblich - <u>irreduzibel</u> genannt, wenn $\{0\}$ und E die einzigen <u>T-Ideale</u> sind, das heißt, außer den trivialen gibt es keine weiteren abgeschlossenen T-invarianten Ideale in E ([S], III.8.1). Die <u>Wachstumsbedingung (G)</u> besagt, daß $\left((\lambda-1)R(\lambda,T) \right)_{\lambda>1}$ beschränkt ist ([S], V.4.7). $R(\lambda,T)$ bezeichnet hierbei die Resolvente

von T . Nach Lemma V.4.8 in [S] existiert nun zu jedem $0 \neq x \in F^s(T)_+$ sogar ein $x' \in F(T')_+$ mit $\langle x,x' \rangle > 0$. Wegen der Irreduzibilität von T muß x' strikt positiv sein. Damit folgt $x \in F(T)_+$.

Wie üblich heißt ein T-Ideal $\{0\} \neq J \subset E$ <u>minimales T-Ideal</u>, wenn die Einschränkung von T auf J irreduzibel ist ([S], III.8.1). Außerdem sei erwähnt, daß ein beliebiger Operator $T \in \mathcal{L}(E)$, E ein Banachraum, mit $r(T) \leq 1$ die Wachstumsbedingung (G) erfüllt, falls die Folge seiner Cesàro-Mittel $M_n(T) = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq m \leq n-1} T^m$ gleichmäßig beschränkt ist ([35], Lemma 1).

In Abschnitt 2 (zum Beispiel (2.13) und (2.14)) und Abschnitt 3 ergeben sich in natürlicher Weise Fragen und Aussagen zur Orthogonalität von Operatoren und deren Potenzen (zur Definition des Infimums zweier Operatoren und für zusätzliche Angaben in diesem Zusammenhang siehe [S], IV.1). Hierfür werden nun neben weiteren allgemeinen Bemerkungen einige Hilfssätze zusammengestellt.

Um die Orthogonalität von Operatoren zu untersuchen, erweist es sich manchmal als vorteilhaft, ihre Einschränkungen auf geeignete Hauptideale des Banachverbandes E zu betrachten (so zum Beispiel in den Beweisen von (3.5) und (4.6)). Dies reduziert die Untersuchung auf die der Orthogonalität von Radonmaßen, wie (1.4) und (1.5) es zeigen.

Wie üblich wird dazu ein Hauptideal E_x , $x \in E_+$, als AM-Raum mit Einheit x aufgefaßt ([S], II.7.2). Für einen

geeigneten kompakten Raum K ist deshalb E_x verbandsisomorph zu $C(K)$. Hierbei entspricht x der Einsfunktion e auf K (Satz von Kakutani, [S], II.7.4). Die Einschränkung einer Linearform $x' \in E'$ auf $C(K)$ erklärt dann ein Radonmaß μ auf K. Außerdem ist $C(K)$ genau dann (abzählbar-)ordnungsvollständig, wenn K (quasi-)Stonesch ist ([S], II.7.7 Corollary).

Zunächst liefert der erste Hilfssatz ebenso wie seine Folgerung Aussagen über die Orthogonalität von Radonmaßen auf einem kompakten quasi-Stoneschen Raum K. Sein Beweis geht aus dem zu Lemma 1 in [1] hervor.

1.1. Hilfssatz. Es sei K ein kompakter, quasi-Stonescher Raum, und seien μ, ν zueinander orthogonale, positive Radonmaße auf K. Wenn μ folgen-ordnungsstetig ist, dann gibt es zu jedem $0 \leq f \in C(K)$ eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K)$ mit $0 \leq f_n \leq f$ und $\nu(f_n) = o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(f-f_n) = o$.

Beweis. Sei $0 \leq f \in C(K)$. Wegen $(\mu \wedge \nu)f = o$ existiert zunächst eine durch f beschränkte, positive Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K)$, die $\mu(f-g_n) + \nu(g_n) < 2^{-(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Hieraus ergibt sich $\nu(\inf\limits_{m\geq n} g_m) = o$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und weil μ folgen-ordnungsstetig ist auch $\mu(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{m\geq n}(f-g_m)) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(f-\inf\limits_{m\geq n} g_m) = o$. Die durch $f_n := \inf\limits_{m\geq n} g_m$ festgelegte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K)$ besitzt somit die geforderten Eigenschaften.

Der Beweis von (4.9 (d) $\Longrightarrow$ (c)) benötigt die anschließende Folgerung.

1.2. Folgerung. Die Voraussetzungen über K, μ und ν seien wie in (1.1). Wenn $\mu \succ 0$ ist, dann gibt es zu jedem $o \prec \varepsilon$ eine stetige charakteristische Funktion $0 \prec f \leq e$ mit $\mu(e-f) \leq \varepsilon$ und $\nu(f) = 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung kann $\mu(e) = 1$ angenommen werden. Nach (1.1) gibt es zunächst ein $0 \prec g \leq e$, das $\mu(e-g) \prec \frac{\varepsilon}{2}$ und $\nu(g) = 0$ erfüllt. Nun bilden aber die offen-abgeschlossenen Mengen von K eine Basis der Topologie von K. Deshalb lassen sich endlich viele, nichtleere, offen-abgeschlossene, zueinander disjunkte Mengen $A_m \subset K$ und Zahlen $o \leq \alpha_m \leq 1$, $1 \leq m \leq n$, finden so, daß die stetige Funktion $h := \sum_{1 \leq m \leq n} \alpha_m \chi_{A_m}$ den Beziehungen $0 \leq h \leq g$ und $\|g-h\| \prec \frac{\varepsilon}{2}$ genügt. Hiermit folgt $\nu(f) = 0$ für die charakteristische Funktion f der offen-abgeschlossenen Menge $A = \bigcup_{1 \leq m \leq n} A_m$. Außerdem gilt $\mu(e-f) \leq \mu(e-h) = \mu(e-g) + \mu(g-h) \prec \varepsilon$.

Auch der nächste, von Heinrich P. Lotz mitgeteilte Hilfssatz wird erst im Beweis (4.9 (c) $\Longrightarrow$ (a)) benötigt. Jedoch bietet sich an, ihn schon hier aufzuführen.

Hierzu wie auch für den Beweis von (1.4) ist die folgende bekannte Aussage nützlich: Sei K kompakt. Existiert in der Ordnung von $C(K)$ das Infimum f von $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \subset C(K)$, so wird es dadurch charakterisiert, daß $\{t \in K : f(t) = \inf_{\alpha \in A} f_\alpha(t)\}$ eine in K dichte G_δ-Menge ist. Ebenso läßt sich

$\sup_{\alpha\in A} f_\alpha$ - falls es existiert - kennzeichnen.

1.3. Hilfssatz. Sei $E = C(K)$, K kompakt und quasi-Stonesch und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ eine Folge paarweise zueinander orthogonaler, auf 1 normierter, positiver Radonmaße auf K. Dann gibt es eine Teilfolge $(\mu_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ohne folgen-ordnungsstetigen $\sigma(E',E)$-Häufungspunkt.

Beweis. Die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist äquivalent zur gewöhnlichen Basis in l^1, also nicht relativ schwach-kompakt. Nach einem Satz von Grothendieck ([S],II.9.8) gibt es daher ein $\varepsilon > 0$, eine Teilfolge $(\mu_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ paarweise zueinander orthogonaler Funktionen mit $0 \le f_n \le e$ sowie $\mu_{m(n)}(f_n) \ge \varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Da E abzählbar-ordnungsvollständig ist und e die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, existiert $g_n := \sup_{m\ge n} f_m$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Wegen der paarweisen Orthogonalität der f_n fällt $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach der Vorbemerkung monoton gegen Null.

Andererseits gilt $\mu_{m(n)}(g_k) \ge \varepsilon$ für $n \ge k$. Also hat $(\mu_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ keinen folgen-ordnungsstetigen $\sigma(E',E)$-Häufungspunkt.

Die zwei folgenden Hilfssätze beschreiben die Orthogonalität von Operatoren auf $C(K)$. δ_t bezeichnet dabei, wie üblich, das Dirac-Maß im Punkt $t\in K$.

1.4. Hilfssatz. Sei K kompakt und Stonesch. Für positive Operatoren S und T auf $C(K)$ sind gleichwertig:

(a) $S \wedge T = 0$.

(b) $S'\delta_t \wedge T'\delta_t = 0$ für alle t aus einer in K dichten G_δ-Menge $D \subset K$.

Beweis. Nach der Definition besagt die Bedingung (a), daß $\inf_{o\le f\le e} (Sf + T(e-f)) = 0$ gilt. Wegen der (1.3) vorangestellten Bemerkung ist deshalb

$\{t \in K: \inf_{o\le f\le e} (Sf(t) + T(e-f)(t)) = 0\}$ eine in K dichte G_δ-Menge. Gleichbedeutend hierzu ist die Bedingung (b).

1.5. Folgerung. Sei K ein kompakter, Stonescher Raum und $0 \le T \in \mathcal{L}(C(K))$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) Die Potenzen von T stehen paarweise senkrecht aufeinander.

(b) Für jedes t aus einer in K dichten G_δ-Menge $D \subset K$ besteht $(T'^n \delta_t)_{n\in\mathbb{N}}$ aus paarweise zueinander orthogonalen Radonmaßen.

Außerdem gilt für $\mu \in C(K)'$ die Bedingung

(c) $T \wedge \mu \otimes e = 0$

genau dann, wenn

(d) $\{t \in K: T'\delta_t \wedge \mu = 0\}$ eine in K dichte G_δ-Menge ist.

Die beiden folgenden (hier etwas allgemeiner angegebenen) Hilfssätze finden sich in den Arbeiten [8] und [9] von Foguel.

1.6. Hilfssatz. Es seien S und T positive Operatoren auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E. Für $x \in F(S)_+ \cap F(T)_+$ gilt die Gleichung

$$(S \wedge T)x = x - \frac{1}{2} \sup_{-x\le y\le x} (S-T)y = x - \frac{1}{2}|S-T|x.$$

Beweis. Für $x \in F(S)_+$ ergibt sich

$(S \wedge T)x = \inf_{0 \le y \le x} (Ty + S(x-y)) = x - \sup_{0 \le y \le x} (Sy - Ty)$.

Nun ist $-x \le 2y-x \le x$ gleichbedeutend mit $0 \le y \le x$. Aus $x \in F(T)_+$ und $y = \frac{1}{2}(z+x)$, $-x \le z \le x$, folgt dann die Behauptung ([S], IV.1.3. (2)).

1.7. Hilfssatz. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband, $0 \le T \in \mathcal{L}(E)$, $x \in F_s(T)_+$ und $m \in \mathbb{N}$ festgelegt. Die durch

$$x_n := \sup_{-x \le y \le x} (T^{m+n} - T^n)y = |T^{m+n} - T^n|x, \quad n \in \mathbb{N},$$

erklärte Folge genügt den Bedingungen

(a) $0 \le x_n \le 2x$, $Tx_n \ge x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

und

(b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fällt monoton.

Für $x \in F(T)_+$ ist (b) gleichwertig mit

(c) $((T^{m+n} \wedge T^n)x)_{n \in \mathbb{N}}$ wächst monoton.

Beweis. Der erste Teil von (a) ergibt sich aus $0 = T^{m+n}0 - T^n 0 \le \sup_{-x \le y \le x} (T^{m+n}y - T^n y) \le 2x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $-x \le y \le x$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $Tx_n \ge T(T^{m+n}y - T^n y) = T^{m+(n+1)}y - T^{(n+1)}y$. Hieraus folgt $Tx_n \ge x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist (a) gezeigt.

(b): Sei $-x \le y \le x$. Dann gilt $-x \le Ty \le x$, weil x in $F_s(T)_+$ liegt. Dies liefert $T^{m+(n+1)}y - T^{n+1}y = T^{m+n}(Ty) - T^n(Ty) \le x_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Aussage in (b) ist also bewiesen.

Für einen positiven T-Fixpunkt x liefert (1.6) die Äquivalenz von (b) und (c).

Nun wird ein Ergebnis von Foguel [9] angegeben und anschließend in einer allgemeineren, mehr verbandstheoretischen Fassung formuliert.

Sei (X,α,μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und T ein linearer Operator auf $L^\infty(X,\alpha,\mu)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(α) T läßt die Einsfunktion $\mathbb{1}$ fest.

(β) T ist positiv.

(γ) T ist folgen-ordnungsstetig.

(δ) Gilt $0 \leq T^n f \leq f$ für $f \in L^\infty(X,\alpha,\mu)$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt $f = \text{const}$.

Dann ist für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ genau eine der anschließenden Bedingungen erfüllt:

(a) $\sup_{-\mathbb{1} \leq g \leq \mathbb{1}} (T^{m+n} - T^n)g = 2\,\mathbb{1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{-\mathbb{1} \leq g \leq \mathbb{1}} (T^{m+n} - T^n)g \right) = 0$.

Hierbei ist wegen (1.6) die Bedingung (a) gleichwertig mit: (a_o) $T^{m+n} \wedge T^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und (b) bedeutet nach (1.7): (b_o) $(|T^{m+n} - T^n|\mathbb{1})_{n \in \mathbb{N}}$ fällt monoton gegen Null.

Foguels Beweis, den ich nicht wiederhole, benutzt neben den Bedingungen (α) - (δ) ausschließlich ordnungstheoretische Eigenschaften des als abstrakten (ordnungsvollständigen) AM-Raum mit Einheit aufgefaßten Banachverbandes $L^\infty(X,\alpha,\mu)$. Deshalb bleibt die Aussage seines Satzes bestehen, wenn $L^\infty(X,\alpha,\mu)$ durch einen ordnungsvollständigen AM-Raum mit Einheit ersetzt wird. Weiter benötigt sein Beweis nicht die Bedingung (δ), sondern die aus (δ)

folgende ([7], I.2.9) Bedingung

(δ_0) $f = \text{const}$, falls $f \in F^s(T^n)_+$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ (vergleiche hierzu auch die Vorbemerkung zu (4.5): wegen (γ) besitzt T nämlich eine (kontraktive) Präadjungierte $0 \leq S \in \mathcal{L}(L^1(X,\alpha,\mu))$, somit trifft $F^s(S')_+ = F(S')_+$ zu).

Zusätzlich geht aus (α) und (δ) hervor, daß die T^n nur die trivialen Bänder in $L^\infty(X,\alpha,\mu)$ invariant lassen. Andernfalls wäre $\dim F(T^n) \geq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, da für ein T^n-invariantes Band $B \subset L^\infty(X,\alpha,\mu)$ unter den Voraussetzungen (α) und (δ) die Beziehung $T^n B^\perp \subset B^\perp$ gilt (vergleiche hierzu die Bedingung (a) auf Seite 52).

Als Anwendung dieser Erläuterungen ergibt sich die nun folgende Aussage. Dabei heißt ein Operator T auf einem Banachverband E <u>bandirreduzibel</u>, wenn E außer den trivialen Bändern keine weitern T-invarianten Bänder enthält.

<u>1.8. Satz</u>. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und T ein folgen-ordnungsstetiger, positiver Operator auf E , der lauter bandirreduzible Potenzen [1] besitzt, der Bedingung $F^s(T)_+ = F(T)_+$ genügt und für den E einen Fixvektor $x \neq 0$ enthält. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$ genau eine der beiden Aussagen:

(a) $T^{m+n} \wedge T^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $(|T^n(1_E - T^m)|\,|x|)_{n\in\mathbb{N}}$ fällt monoton gegen Null.

<u>Beweis</u>. Die Einschränkung von T auf den (ordnungsvollständigen) AM-Raum $E_{|x|}$ erfüllt nach den vorangehenden

[1] Darunter wird von nun an immer T^n , $n \in \mathbb{N}$, verstanden.

Erläuterungen die Voraussetzungen von Foguels Satz. Das von $|x|$ in E erzeugte Hauptband $B(|x|)$ ist ein Projektionsband. Wegen der Bandirreduzibilität und der Folgen-Ordnungsstetigkeit von T ist $|x|$ daher eine schwache Ordnungseinheit in E. Deshalb gilt (a), falls (b) nicht zutrifft.

Bemerkungen. 1. Die Bedingung (b) ist für ein $m \in \mathbb{N}$ also immer dann erfüllt, wenn es nicht-orthogonale Potenzen von T gibt.

2. Entscheidend beim Beweis von (1.8) ist die Gültig- von (a) bzw. (b) für die Einschränkung U von T auf (das in E ordnungsdichte Ideal) E_x. Nur U muß demnach die Bedingung $F^s(U)_+ = F(U)_+$ erfüllen.

(1.8) besitzt in dieser Arbeit drei unmittelbare Anwendungen: Aussagen zu Verbandsisomorphismen (1.9), zum peripheren Punktspektrum eines positiven Operators (2.20) und zur Herleitung eines Ergodensatzes (4.1).

Zunächst noch einige grundsätzliche Bemerkungen: Abgesehen von den Ausnahmen (1.9) und (2.15) geht diese Arbeit nicht auf bandirreduzible Operatoren ein. Allerdings lassen sich manche Fragen über einen bandirreduziblen, ordnungsstetigen Operator $0 \lneq T \in \mathcal{L}(E)$, E ein ordnungsvollständiger Banachverband, zurückführen auf Aussagen über einen irreduziblen Operator, sofern E eine von Null verschiedene, ordnungsstetige Linearform zuläßt. Für einen geeigneten kompakten Raum K und ein strikt positives

Radonmaß μ auf K kann dabei E durch $L^1(K,\mu)$ ersetzt werden. Einen Weg hierzu zeigt der erste Teil des Beweises von (1.9).

Ohnehin fallen die Begriffe 'irreduzibel' und 'bandirreduzibel' zusammen, wenn der Banachverband E ordnungsstetige Norm besitzt ([S], II.5.14(d)). Außerdem ist auf einem solchen Banachverband die Adjungierte T' eines irreduziblen Operators T immer bandirreduzibel ([S], II.5.10 Corollary 2), aber im allgemeinen nicht irreduzibel (vergleiche das Beispiel auf Seite 87).

1.9. Satz (vgl. [9], Remark). Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband, der von Null verschiedene ordnungsstetige Linearformen besitzt. Weiter sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein Verbandsisomorphismus [2], der die Bedingung $F^s(T)_+ = F(T)_+ \neq \{0\}$ erfüllt und dessen Potenzen alle bandirreduzibel sind. Dann trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:

(a) Die Potenzen von T stehen paarweise senkrecht aufeinander.

(b) $\dim E = 1$ und $T = 1_E$.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es eine ordnungsstetige Linearform $0 < y' \in E'$. Sei $\lambda > r(T)$. Für $z' := R(\lambda,T')y'$ gilt dann $T'z' \leq \lambda z'$ ([S], Seite 323). Da T als Verbandsisomorphismus ordnungsstetig ist, besitzt als Linearform auch z' diese Eigenschaft. Somit ist $N = \{x \in E: \langle |x|,z' \rangle = 0\}$ ein T-invariantes Band.

[2] Dabei wird von nun an immer $TE = E$ verlangt.

Aus der Bandirreduzibilität von T und $z' \succ 0$ folgt daher $N = \{0\}$; das heißt, z' ist strikt positiv. E läßt sich deshalb als dichtes Ideal in (E,z') auffassen ([S], IV.9.3). Die eindeutige stetige Fortsetzung $\tilde{T}$ von T auf (E,z') ist irreduzibel: jedes abgeschlossene Ideal $\tilde{J}$ in dem AL-Raum (E,z') ist nämlich schon ein Band. Daher ist $\tilde{J} \cap E$ ein Band in E. Die $\tilde{T}$-Invarianz von $\tilde{J} \cap E$ zusammen mit der Bandirreduzibilität von T führt dann zu $J \cap E = \{0\}$ oder $J \cap E = E$. Also gilt $\tilde{J} = \{0\}$ oder $\tilde{J} = (E,z')$, weil E dicht in (E,z') liegt. Dies zeigt die Irreduzibilität von $\tilde{T}$. Insbesondere enthält daher (E,z') eine schwache Ordnungseinheit. Somit läßt sich für einen geeigneten kompakten Raum K und ein strikt positives Radonmaß μ auf K der AL-Raum (E,z') als $L^1(K,\mu)$ darstellen ([S], II.8.5) (Dies beendet die Beschreibung der zuvor erwähnten Reduktion.).

Sogar alle Potenzen von $\tilde{T}$ sind irreduzibel. Damit gilt (1.8.a) oder (1.8.b) für $\tilde{T}$ und $0 \prec x \in F(\tilde{T})$, wie Bemerkung 2 zu (1.8) zeigt. Außerdem ist $\tilde{T}$ ein Verbandsisomorphismus. Der einfacheren Schreibweise wegen wird jetzt wieder T statt $\tilde{T}$ und E statt (E,z') geschrieben.

Für den Fall, daß auf ein $m \in \mathbb{N}$ die Bedingung (b) von (1.8) zutrifft, wird nun $\dim E = 1$ gezeigt. Dann gilt auch $T = 1_E$.

Sei also (1.8.b) für ein $m \in N$ erfüllt. Wegen $\langle x, |T'^n(1_{E'} - T'^m)x'| \rangle \leq \langle |T^n(1_E - T^m)|x, x' \rangle$ für alle $x' \in E'$ folgt mit der Ordnungsstetigkeit von jedem x', daß

$\lim_{n\in\mathbb{N}} \langle x, |T'^n(1_{E'}-T'^m)x'| \rangle = o$ gilt. Da auch T' ein Verbandsisomorphismus ist, führt dies zu der Gleichung $\langle x, |(1_{E'}-T'^m)x'| \rangle = o$. Nun liegt aber E_x dicht in E, also gilt $T'^m = 1_{E'}$ und somit $T^m = 1_E$. Wegen der Irreduzibilität von T^m besitzt daher E die Dimension 1 ([S], II.3.4).

(2.16) verzichtet auf die einschränkende Voraussetzung von (1.9) über die (Band)Irreduzibilität aller Potenzen von T [3]. Den dazu notwendigen Aufschluß über die T^n-Ideale eines irreduziblen, positiven Operators liefert der folgende Abschnitt.

---

[3] In seiner Dissertation 'Über das Spektrum regulärer Operatoren', Tübingen 1979, erzielt Wolfgang Arendt mit Satz 4.21 ein Ergebnis, das sowohl (1.9) als auch (2.16) als Spezialfall enthält.

2. T^n-IDEALE EINES IRREDUZIBLEN, POSITIVEN OPERATORS T

Zu einer irreduziblen, positiven $n \times n$ Matrix A gehört eine ordnungsdirekte Zerlegung des komplexen Banachverbandes $\mathbb{C}^n$ in p Ideale $(J_q)_{1 \leq q \leq p}$. Dabei ist p der Imprimitivitätsindex, und es gilt $AJ_q \subset J_{q+1}$, $q \bmod p$. Dieses Ergebnis - hier formuliert in der Terminologie der Banachverbände - geht auf Frobenius [12] zurück.

Weiter sind die Potenzen der Einschränkungen $A^p|_{J_q}$, $1 \leq q \leq p$, irreduzibel. Das heißt, daß jedes J_q ein minimales A^{pn}-Ideal, $n \in \mathbb{N}$, ist ([S], I.7.3, 7.4). Eine Anwendung hiervon besteht in der Beschreibung des Grenzverhaltens einer Markoff-Kette mit endlichem Zustandsraum ([S], I.9).

Der erste Teil dieses Abschnittes gibt eine Methode an, die eine Verallgemeinerung von Frobenius' Aussage auf einen irreduziblen, positiven Operator T auf einem beliebigen Banachverband E (2.4) erlaubt. Diese Methode verwendet die Theorie der abgeschlossenen Ideale eines Banachverbandes ([S], III.1, III.8).

Die ersten drei Hilfssätze bereiten den Beweis von (2.4) vor. Dazu sei $(0 \neq)$ T immer ein positiver Operator auf einem Banachverband E. Zur einfacheren Formulierung heißt ein Ideal $\{0\} \neq J \subset E$ T-zerlegbar, wenn es zwei von Null verschiedene, zueinander orthogonale T-Ideale enthält. Ansonsten wird es T-unzerlegbar genannt. Weiter bezeichnet $\overline{I}(A)$ den Abschluß des von einer Teilmenge A

in E erzeugten Ideals $I(A)$. Dabei gilt für ein Ideal $J \subset E$ immer $\overline{I}(T^{m+n}J) = \overline{I}(T^m\overline{I}(T^nJ))$, $m \geq o$, $n \geq o$.

Zunächst wird noch ein Beispiel zur Unzerlegbarkeit und zur Irreduzibilität gegeben.

Beispiel 1. Für $E = l^1(\mathbb{N})$ und den durch $(Tx)_n := x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ erklärten Shiftoperator ist $l^1(\mathbb{N})$ zwar T-unzerlegbar, aber T ist nicht irreduzibel (und außerdem nicht strikt positiv).

Wenn aber ein Verbandsisomorphismus auf einem Banachverband E mit ordnungsstetiger Norm die folgende Eigenschaft besitzt: ' genau dann bleibt ein Band $B \subset E$ T-invariant, wenn es T^{-1}-invariant ist ', dann ergibt sich aus der T-Unzerlegbarkeit von E schon die Irreduzibilität von T. (Ein Verbandsisomorphismus S auf einem linearen Verband F läßt nämlich genau dann ein Projektionsband $B \subset F$ invariant, wenn $B^\perp$ invariant unter T^{-1} bleibt.)

2,1. Hilfssatz. Sei T strikt positiv. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ seien $J \subset E$ und $K \subset E$ von Null verschiedene, zueinander orthogonale T^n-Ideale. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $m \geq o$ sind $\overline{I}(T^mJ)$ und $\overline{I}(T^mK)$ von Null verschiedene, zueinander orthogonale T^n-Ideale.

(b) Aus der T^n-Zerlegbarkeit (-Unzerlegbarkeit) von J folgt die T^n-Zerlegbarkeit (-Unzerlegbarkeit) des T^n-Ideals $\overline{I}(T^m J)$, $m \geq o$.

(c) Sei J T^n-unzerlegbar und $J \cap \overline{I}(T^q J) \neq \{o\}$ für ein $q \in \mathbb{N}$. Dann ist für alle $l \geq o$ und $m \geq o$ das T^n-Ideal $\bigcap_{o \leq k \leq m} \overline{I}(T^{l+kq} J)$ T^n-unzerlegbar.

Beweis. (a) Die T^n-Invarianz von $\overline{I}(T^m J)$ bzw. $\overline{I}(T^m K)$ ergibt sich für jedes $m \geq o$ aus der T^n-Invarianz von J bzw. K. Wegen der strikten Positivität von T folgt $\overline{I}(T^m J) \neq \{o\} \neq \overline{I}(T^m K)$ für alle $m \geq o$. Mit Induktion über $m \geq o$ wird die noch verbleibende Aussage von (a) gezeigt: für $o \leq l \leq m$ sei die Behauptung bewiesen. Angenommen, es gilt $L := \overline{I}(T^{m+1} J) \cap \overline{I}(T^{m+1} K) \neq \{o\}$. Da auch T^{n-1} strikt positiv ist, ergibt dies $\overline{I}(T^{n-1} L) \neq \{o\}$. Außerdem führen $T^n J \subset J$ und $T^n K \subset K$ zu $\overline{I}(T^{n-1} L) \subset \overline{I}(T^m J) \cap \overline{I}(T^m K)$ – ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

(b) Sei $m \geq o$ fest gewählt. Wenn J T^n-zerlegbar ist, ergibt sich die T^n-Zerlegbarkeit von $\overline{I}(T^m J)$ aus (a). Seien nun $\{o\} \neq L_1$ und $\{o\} \neq L_2$ zueinander orthogonale T^n-Ideale in $\overline{I}(T^m J)$, und sei $l \in \mathbb{N}$ mit $ln \geq m$. Wegen (a) und $T^n J \subset J$ sind $\overline{I}(T^{ln-m} L_1)$ und $\overline{I}(T^{ln-m} L_2)$ von Null verschiedene, zueinander orthogonale T^n-Ideale in J. Damit ist $\overline{I}(T^m J)$ T^n-unzerlegbar, falls J ebenfalls diese Eigenschaft besitzt.

(c) Nach (b) muß nur $\bigcap_{o \leq k \leq m} \overline{I}(T^{l+kq} J) \neq \{o\}$ für alle

$m \geq o$ nachgewiesen werden. Dies erfolgt durch Induktion über $m \geq o$ für $l = o$ (hieraus ergibt sich der allgemeine Fall wegen der strikten Positivität von T): nach der Voraussetzung gilt die Behauptung für $m = o$ und $m = 1$. Sei $\bigcap_{o \leq k \leq m} \overline{I}(T^{kq}J) \neq \{o\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Da auch T^q strikt positiv ist, folgt $\bigcap_{o \leq k \leq m} \overline{I}(T^{(k+1)q}J) \neq \{o\}$. Angenommen, es sei $\bigcap_{o \leq k \leq m+1} \overline{I}(T^{kq}J) = \{o\}$. Dann sind $\bigcap_{o \leq k \leq m} \overline{I}(T^{kq}J)$ und $\bigcap_{o \leq k \leq m} \overline{I}(T^{(k+1)q}J)$ von Null verschiedene, zueinander orthogonale T^n-Ideale in $\overline{I}(T^qJ)$. Dies widerspricht (b).

Bemerkung. Jeder von Null verschiedene, positive Operator ohne echten positiven Sub-Fixpunkt ist strikt positiv. Dies gilt auch für jeden von Null verschieden, irreduziblen, positiven Operator ([S], Seite 333). Umgekehrt ist nicht jeder strikt positive Operator irreduzibel. Das belegt

Beispiel 2. Für $E = l^1(\mathbb{Z})$ und den Schiftoperator T ist E T-unzerlegbar (vergleiche Beispiel 1). Weiter ist T strikt positiv, aber nicht irreduzibel.

Auch folgt aus der strikten Positivität von T nicht die T-Unzerlegbarkeit von E, wie $T = T_\varphi^2$ aus Beispiel 3 (Seite 32) zeigen wird.

2.2. Hilfssatz. Sei T strikt positiv und J für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ein T^n-unzerlegbares T^n-Ideal. $q(n)$ bezeichne die kleinste natürliche Zahl, für die $J \cap \overline{I}(T^{q(n)}J) \neq \{o\}$ ist. Sei weiter $l \geq o$ und $m \geq o$

mit $m \succ 1$ sowie $\overline{I}(T^1J) \cap \overline{I}(T^mJ) \neq \{0\}$. Dann gilt:

(a) $q(n)$ teilt $m-1$.

(b) Die Idealkette $(\overline{I}(T^qJ))_{0 \leq q \leq q(n)-1}$ besteht aus paarweise zueinander orthogonalen T^n-unzerlegbaren T^n-Idealen, und $q(n)$ teilt m.

Beweis. Es gibt ein $k \geq 0$ und ein $0 \leq q \prec q(n)$ mit $m-1 = kq(n)+q$. Nach (2.1.c) ist $\overline{I}(T^1J) \cap \overline{I}(T^{1+kq(n)}J) \neq \{0\}$ und somit auch $\overline{I}(T^1J) \cap \overline{I}(T^{1+kq(n)}J) \cap \overline{I}(T^mJ) \neq \{0\}$. Sonst wäre wegen $\overline{I}(T^1J) \cap \overline{I}(T^mJ) \neq \{0\}$ das Ideal $\overline{I}(T^1J)$ im Widerspruch zu (2.1.b) T^n-zerlegbar.

Nach der Definition von $q(n)$ ist $J \cap \overline{I}(T^qJ) = \{0\}$, falls $q \succ 0$ gilt. Wegen $m-q = 1+kq(n)$ und (2.1.a) folgt hieraus $\overline{I}(T^{1+kq(n)}J) \cap \overline{I}(T^mJ) = \{0\}$. Daher muß $q = 0$ gelten, also ist (a) gezeigt.

Insbesondere gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = kq(n)$. Die Annahme $\{0\} \neq \overline{I}(T^rJ) \cap \overline{I}(T^sJ)$ für $0 \leq r \prec s \prec q(n)$ zusammen mit der strikten Positivität von T liefert weiter die Beziehung $J \cap \overline{I}(T^{s-r}J) \neq \{0\}$. Dies widerspricht aber der Definition von $q(n)$ und beweist somit (b)..

2.3. Hilfssatz. Sei T strikt positiv und E T-unzerlegbar. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) In E liegen für jedes $n \in \mathbb{N}$ höchstens n von Null verschiedene, paarweise zueinander orthogonale T^n-Ideale.

(b) E enthält für jedes $n \in \mathbb{N}$ mindestens ein T^n-unzerlegbares T^n-Ideal.

Beweis. (a) Die l T^n-Ideale $(J_k)_{1\le k\le l}$ seien jeweils von Null verschieden und paarweise zueinander orthogonal. Für jedes $1 \le k \le l$ ist $L_k := \sum_{o\le m\le n-1} \overline{I}(T^m J_k)$ ein abgeschlossenenes Ideal ([S], III.1.2), sogar ein T-Ideal. Wegen der Distributivität des Verbandes aller Ideale in E ([S], II.2.3) und der T-Unzerlegbarkeit von E gilt

$$\{o\} \neq \bigcap_{1\le k\le l} L_k = \sum_{(i_k)_{1\le k\le l}} \bigcap_{1\le k\le l} \overline{I}(T^{i_k} J_k) ,$$

wobei über alle l-Tupel $(i_k)_{1\le k\le l}$ mit $o \le i_k \le n-1$ summiert wird. Für mindestens ein $(i_k)_{1\le k\le l}$ muß also $\bigcap_{1\le k\le l} \overline{I}(T^{i_k} J_k) \neq \{0\}$ sein. Mit (2.1.a) folgt nun die Behauptung von (a).

(b) Für den Fall, daß E T^n-zerlegbar ist, enthält E zwei von Null verschiedene, zueinander orthogonale T^n-Ideale. Ist keines dieser Ideale T^n-unzerlegbar, so gibt es vier von Null verschiedene, zueinander orthogonale T^n-Ideale. Wegen (a) endet dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten.

Beim Beweis des nun folgenden, zu Beginn dieses Abschnittes angekündigten Satzes ist (2.3.b) wesentlich.

2.4. Satz. Sei T ein irreduzibler, positiver Operator auf einem Banachverband E. Für jede natürliche Zahl n ist E die ordnungsdirekte Summe aller seiner minimalen T^n-Ideale $(J_{n,q})_{1\le q\le p(n)}$. Ihre Anzahl $p(n)$ teilt n, und es gilt $T(J_{n,q}) \subset J_{n,q+1}$, $q \bmod p(n)$.

Beweis. Sei $T \triangleright 0$. Nach (2.3.a) enthält E ein T^n-unzerlegbares T^n-Ideal J . Die kleinste natürliche Zahl $p(n)$, für die $J \cap \overline{I}(T^{p(n)}J) \neq \{0\}$ gilt, teilt n wegen (2.2.a). Sei also $l = \frac{n}{p(n)}$ und K das T^n-unzerlegbare $T^{p(n)}$-Ideal $\bigcap_{0 \leq k \leq l-1} \overline{I}(T^{kp(n)}J)$ (2.1.c). Aus der Irreduzibilität von T folgt somit $E = \sum_{0 \leq q \leq p(n)-1} \overline{I}(T^qK) = \sum_{0 \leq q \leq p(n)-1} \overline{I}(T^qJ)$. Die paarweise Orthogonalität der $\overline{I}(T^qJ)$, $1 \leq q \leq p(n)$, (2.2.b), liefert dann $K = J$, also die $T^{p(n)}$-Invarianz von J .

Außerdem gibt es zu jedem T^n-unzerlegbaren T^n-Ideal $L \subset E$ ein $1 \leq q \leq p(n)$ mit $L \subset \overline{I}(T^qJ)$. Die kleinste natürliche Zahl $q(n)$, die $L \cap \overline{I}(T^{q(n)}L) \neq \{0\}$ erfüllt, wird wegen $\overline{I}(T^qJ) \cap \overline{I}(T^{q+q(n)}J) \neq \{0\}$ und (2.2.a) von $p(n)$ geteilt.

Vertauschen von J und L führt mit demselben Schluß wie eben zu $q(n) = p(n)$. Damit bilden die $J_{n,q} := \overline{I}(T^qJ)$, $1 \leq q \leq p(n)$, alle T^n-unzerlegbaren T^n-Ideale von E . Das war zu zeigen.

Bemerkungen. 1. Die Aussagen von (2.4) werden falsch, wenn T nur als strikt positiv und E als T-unzerlegbar vorausgesetzt wird. Dies zeigt Beispiel 2.

2. Es sei T ein bandirreduzibler, ordnungsstetiger, positiver Operator auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E . Unter diesen Voraussetzungen läßt sich mit den offensichtlichen Entsprechungen (wie etwa 'minimales T-Band' statt 'minimales T-Ideal') ein zu (2.4) analoges Ergebnis herleiten. Für $E = L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-end-

licher Maßraum, steht dies in [24], Theorem 1 , von Moy. Ihre Beweismethode habe ich hier auf die allgemeinere Situation übertragen (vergleiche dazu Bemerkung 4). Dies trifft auch für (2.6) und (2.7) zu.

3. Sei E ein Banachverband, der sowohl schwache Ordnungseinheiten enthält als auch die Hauptbandeigenschaft besitzt, zum Beispiel $E = B(X,\mathcal{A})$ (siehe Seite 78). Dann sind Projektionsbänder sogar Hauptbänder ([S],II.2.12). Nun kann (2.4) auch übertragen werden auf einen folgenordnungsstetigen, positiven Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ (zum Beispiel $T = T_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}(B(X,\mathcal{A}))$, Seite 78), der kein echtes Projektionsband invariant läßt.

4. Bezeichnet - wie üblich - A° die Polare von $A \subset E$ bezüglich der Dualität $\langle E,E' \rangle$, so sind die $J'_{n,q} := \bigcap_{r \neq q} J^{\circ}_{n,r}$, $1 \leq q,r \leq p(n)$, genau die minimalen $\sigma(E',E)$-abgeschlossenen, T'^{n}-invarianten Bänder in E' , und es gilt: $E' = \bigoplus_{1 \leq q \leq p(n)} J'_{n,q}$, $T'J'_{n,q+1} \subset J'_{n,q}$, q mod $p(n)$, sowie $J'_{n,q} = (J_{n,q})'$, $1 \leq q \leq p(n)$ ([S], II.5.5 Corollary).

Eine erste Folgerung aus (2.4) liefert nun eine vollständige Übersicht über alle T^{n}-Ideale eines irreduziblen, positiven Operators T . Hierzu werden, wie auch im weiteren, die in (2.4) eingeführten Bezeichnungen beibehalten und außerdem die Bandkomponenten von $x \in E$ in $J_{n,q}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq p(n)$, immer $x_{n,q}$ genannt.

2.5. Folgerung. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau $2^{p(n)}$ T^{n}-Ideale. Ein T^{n}-Ideal $J \subset E$ läßt sich schreiben als die ordnungsdirekte Summe geeigneter $J_{n,q}$, $1 \leq q \leq p(n)$.

Daher ist J ein $T^{p(n)}$-invariantes Projektionsband, und es gilt $T^n J^\perp \subset J^\perp$.

Beweis. Sei J ein T^n-Ideal, $n \in \mathbb{N}$ fest. Wegen der Distributivität des Verbandes aller Ideale in E ([S], II.2.3) gilt $J = \sum_{1 \le q \le p(n)} J \cap J_{n,q}$. Aus $\{0\} \neq J \cap J_{n,q}$ für ein $1 \le q \le p(n)$ folgt $J \cap J_{n,q} = J_{n,q}$, weil $J_{n,q}$ ein minimales T^n-Ideal ist. Dies beweist die Folgerung.

Weitere Auskunft über den Aufbau der T^n-Ideale eines irreduziblen, positiven Operators T gibt die anschließende Folgerung.

2.6. Folgerung. Es sei E ein Banachverband, $0 \le T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel und $m \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $n \in \mathbb{N}$. Dann teilt $p(m)$ die Zahl $p(n)$, und jedes minimale T^m-Ideal ist die ordnungsdirekte Summe von $\frac{p(n)}{p(m)}$ minimalen T^n-Idealen.

Beweis. Nach der Voraussetzung zusammen mit (2.5) enthält $J_{m,1}$ ein minimales $T^{p(n)}$-Ideal, das ohne Einschränkung als $J_{n,1}$ angenommen werden kann. Aus $\{0\} \neq \overline{I}(T^{p(n)} J_{m,1}) \cap \overline{I}(T^{p(n)} J_{n,1}) \subset \overline{I}(T^{p(n)} J_{m,1}) \cap J_{m,1}$ folgt zunächst mit (2.2.a), daß $p(m)$ die Zahl $p(n)$ teilt. Weiter besteht nach (2.4) die Idealkette $(L_q)_{1 \le q \le p(m)}$ mit $L_q = \sum_{0 \le k \le r} J_{n,q+kp(m)}$ für $r = \frac{p(n)}{p(m)} - 1$ aus allen minimalen T^m-Idealen.

Es liegt nun nahe, für einen irreduziblen, positiven Operator T den Fall zu betrachten, daß die Zyklenlängen $p(n)$ der durch T zyklisch permutierten Idealketten $(J_{n,q})_{1\le q\le p(n)}$ gleichmäßig beschränkt sind. Dann wird gesagt, T besitze die Zyklengrenze $p := \sup_{n\in\mathbb{N}} p(n)$.

2.7. Satz. Es sei T ein irreduzibler, positiver Operator auf einem Banachverband E . Genau dann hat T die Zyklengrenze p , wenn sich E darstellen läßt als die ordnungsdirekte Summe von p Idealen $(J_q)_{1\le q\le p}$, die für jedes $n\in\mathbb{N}$ minimale T^{pn}-Ideale sind und außerdem $TJ_q \subset J_{q+1}$, q mod p , erfüllen.

Andererseits sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) T besitzt keine Zyklengrenze.

(b) Es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(s(n))_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ und eine Folge $(t(n))_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ mit $s(n+1) = t(n+1)s(n)$, $n\in\mathbb{N}$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ besitzt E eine ordnungsdirekte Darstellung von $s(n)$ minimalen $T^{s(n)}$-Idealen $(K_{n,1})_{1\le l\le s(n)}$. Dabei läßt sich jedes $K_{n,l}$ als ordnungsdirekte Summe von $t(n+1)$ Idealen aus $(K_{n+1,l})_{1\le l\le s(n+1)}$ schreiben, und es gilt $TK_{n,l}\subset K_{n,l+1}$, l mod $s(n)$.

Beweis. Mit p als Zyklengrenze ist nach (2.4) E zunächst die ordnungsdirekte Summe von p minimalen T^p-Idealen $(J_q)_{1\le q\le p}$ mit $TJ_q\subset J_{q+1}$, q mod p . Wegen $p(p) = p \le p(np) \le p$ (2.6.) gilt außerdem $p(np) = p$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Daher ist jedes J_q ein minimales

T^{pn}-Ideal, $n \in \mathbb{N}$.

Andererseits folgt aus der Existenz einer natürlichen Zahl p mit den angegebenen Eigenschaften die Gleichung $p(np) = p$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Hieraus ergibt sich mit

(2.6) $\sup_{n \in \mathbb{N}} p(n) = p$.

Die Gleichwertigkeit von (a) und (b) liefern (2.4) und (2.6).

Wenn der irreduzible, positive Operator T die Zyklengrenze p besitzt, so wird im weiteren unter $(J_q)_{1 \le q \le p}$ immer die Idealkette aus (2.7) verstanden. Die zugehörigen Bandkomponenten von $x \in E$ heißen x_q .

2.8. Folgerung. Sei E ein Banachverband und $0 \le T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel mit Zyklengrenze p . Dann ist T^{np+1} irreduziblel für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $J \neq \{0\}$ ein T^{np+1}-Ideal für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung kann $0 < x \in J \cap J_1$ angenommen werden. Dies führt wegen $0 \neq T^{q(np+1)} x \in J \cap J_{q+1}$, q mod p , zu $J \cap J_q \neq \{0\}$ für jedes $1 \le q \le p$. Aus $T^{p(np+1)}(J \cap J_q) \subset J \cap J_q$ folgt nun nach (2.7) die Gleichung $J \cap J_q = J_q$ für jedes $1 \le q \le p$. Also gilt $J = E$.

Dies beendet den allgemeinen Teil der Untersuchung der T^n-Ideale eines irreduziblen, positiven Operators T . Mit einer einfachen Anwendung von (2.4) wird nun in (2.10) ein Ergebnis von Wolff ([36], Theorem 2.6) über Verbandshomomorphismen vervollständigt. Anschließend folgt eine Existenzaussage zur Zyklengrenze von T (2.11). Dann wird auf die Orthogonalität der Potenzen von T und schließlich auf

das Spektrum von T eingegangen.

Zum Beweis des folgenden Satzes muß nur bemerkt werden, daß aus der Irreduzibilität der Identität 1_E auf einem Banachverband $E(\neq \{0\})$ immer $\dim E = 1$ folgt ([S], II.3.4). Außerdem heißt ein linearer Operator auf einem Banachraum E periodisch, wenn eine seiner positiven Potenzen gleich der Identität 1_E ist.

2.9.Satz. Auf einem nicht endlichdimensionalen Banachverband gibt es keinen periodischen, irreduziblen, positiven Operator.

Genauer gilt für einen periodischen, irreduziblen, positiven Operator T auf einem Banachverband E : $\dim J_{n,q} = 1$ für alle $1 \leq q \leq n$, falls $T^n = 1_E$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$. Damit hat E die Dimension $p(n)$, und T ist ein periodischer, irreduzibler Verbandsisomorphismus der Zyklenlänge $p = p(n)$. Sein Spektrum besteht aus allen p-ten Einheitswurzeln, und es gilt $p = \min\{m \in \mathbb{N} : T^m = 1_E\}$.

2.10. Satz. Es sei E ein Banachverband und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel mit Spektralradius $r(T) = 1$. Besitzt die Resolvente $R(\lambda, T)$ in $\lambda = 1$ einen Pol, so sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) Das Spektrum von T liegt im Einheitskreis.

(b) T ist ein Verbandshomomorphismus.

(c) T ist ein periodischer Verbandsisomorphismus.

(d) E ist endlich-dimensional, T periodisch, und es gilt $\dim E = \min_{n \in \mathbb{N}} \{m \in N : T^m = 1_E\}$.

Beweis. Die Gleichwertigkeit von (a), (b) und (c) zeigt Wolff in [36], Theorem 2.6 (siehe die nächste Bemerkung).

Satz (2.9) und die daran anschließende Erläuterung zeigen (c)$\Longleftrightarrow$(d).

Bemerkung. Wolff beweist die Äquivalenz der Bedingungen (a), (b) und (c) für einen irreduziblen, positiven Operator T, der $r(T) = 1$ erfüllt und gleichmäßig (mittel-) ergodisch ist. Gleichwertig hierzu ist die Voraussetzung von (2.10) über T (Dies läßt sich der Übersicht über gleichmäßig (mittel)ergodische Operatoren in Abschnitt 4, ab Seite 72, entnehmen. Hierzu muß noch folgendes berücksichtigt werden: bei einem irreduziblen, positiven Operator T, dessen Spektralradius $r(T) = 1$ und Pol der Resolvente ist, hat $r(T)$ die Ordnung 1 ([21], Satz 5.4)).

Allein aus Dimensionsgründen besitzt eine irreduzible, positive $n \times n$ Matrix A eine Zyklengrenze $p \leq n$. (2.19) zeigt, daß p der Imprimitivitätsindex von A ist (dort wird die Frage behandelt, wann für ein $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $p(n) = n$ zutrifft). Der folgende Satz umfaßt auch die eben genannte Aussage über Matrizen.

2.11. Satz. Der Banachverband E enthalte minimale Ideale. Dann existiert für jeden irreduziblen, positiven Operator T auf E die Zyklengrenze.

Beweis. Sei J ein minimales Ideal in E. Angenommen, $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ ist irreduzibel, besitzt aber keine Zyklengrenze. Dann gilt mit (2.7.b) und den dortigen Be-

zeichnungen : J liegt für jedes $n \in \mathbb{N}$ in genau einem K_{n,l_J} , $1 \leq l_J \leq s(n)$. Die $\overline{I}(T^n J)$, $n \geq o$, sind also von Null verschieden und paarweise zueinander orthogonal. Dies widerspricht der Irreduzibilität von T ($K := \overline{I}(\bigoplus_{n \geq 2} T^n J)$ ist nämlich ein echtes T-Ideal in E).

2.12. Folgerung. Für jeden irreduziblen, positiven Operator T auf l^q , $1 \leq q \leq \infty$, existiert die Zyklengrenze.

Es gibt auch irreduzible, positive Operatoren, die keine Zyklengrenze besitzen. Dies zeigt

Beispiel 3.[1] Es sei $X = [o,1)$, $\mathcal{A}$ die Sigma-Algebra der Borelmengen in X und μ das Lebesguemaß auf X . Die durch $\varphi(t) = t+1-\frac{3}{2^{n+1}}$, $t \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$, $n \geq o$ erklärte Abbildung $\varphi : X \longrightarrow X$ läßt μ invariant und induziert daher einen positiven Operator T_φ auf $L^q(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 \leq q \leq \infty$ ([S],III.9.Example 1). Für $1 \leq q < \infty$ ist T_φ irreduzibel, hat aber keine Zyklengrenze.

In (2.11) erzwingt eine Struktureigenschaft des Banachverbandes E die Existenz der Zyklengrenze eines irreduziblen, positiven Operators. Um hierfür ein operatortheoretisches Kriterium herzuleiten, werden nun Orthogonalitätsbeziehungen der Potenzen eines solchen Operators im Zusammenhang mit der Zyklengrenze angegeben.

---

[1] Dieses Beispiel teilte mir Günther Palm mit.

2.13. Satz. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Für $l, m, n \in \mathbb{N}$ mit $l \neq m \bmod p(n)$ ist $T^l \wedge T^m = 0$.

(b) Wenn es nicht-orthogonale Potenzen von T gibt, dann existiert die Zyklengrenze von T.

Beweis. Sei $x \in E_+$ und $x_{n,q}$ die Bandkomponente von x in $J_{n,q}$, $1 \leq q \leq p(n)$. Die Bedingung $l \neq m \bmod p(n)$ von (a) führt dann zu $(T^l \wedge T^m)x_{n,q} \leq T^l x_{n,q} \wedge T^m x_{n,q} = 0$. Dies zeigt (a).

Die Aussage von (b) ist eine Folgerung aus (a).

Für die in Abschnitt 3 betrachteten irreduziblen, positiven Harris-Operatoren wird in (3.5) die Bedingung (2.13.b) nachgewiesen. Dabei verbessert die Existenz positiver Fixpunkte wie folgt die Aussage von (2.13.b).

2.14. Satz. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel mit $0 \neq x \in F(T)_+$. Wenn es nicht-orthogonale Potenzen von T gibt, dann ist die Zahl

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \{l(n) : l(n) = \inf\{m \in \mathbb{N} : T^{m+n} \wedge T^n \succ 0\}\}$$

eine obere Schranke für die Zyklengrenze p von T.

Beweis. Sei $T^{m_o+n_o} \wedge T^{n_o} \succ 0$ für ein $m_o \in \mathbb{N}$ und ein $n_o \in \mathbb{N}$. Angenommen, für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $p(k) \succ m_o$. Wegen (2.13.a)

folgt hieraus $T^{m_o+lp(k)} \wedge T^{lp(k)} = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Dies widerspricht $T^{m_o+n_o} \wedge T^{n_o} \succ 0$, weil nach (1.7.c) die Folge $((T^{m_o+n} \wedge T^n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und x ein quasi-innerer Punkt ist.

Bemerkung. Im allgemeinen stimmt die Zyklengrenze nicht mit der in (2.14) angegebenen Schranke überein. Es gibt positive Operatoren, deren Potenzen alle irreduzibel sind und paarweise senkrecht aufeinander stehen. Dies zeigt

Beispiel 4. Sei K der Einheitskreis der komplexen Zahlen und $E = C(K)$ oder $E = L^q(K,\mu)$, $1 \leq q < \infty$, μ das normierte Haarmaß. Für $z_o \in K$ bezeichnet T_{z_o} den durch $T_{z_o}f(z) = f(z_o z)$, $f \in E$, erklärten (Rotations-)Operator. Dieser ist ein Verbandsisomorphismus, und jedes z_o, das keine Einheitswurzel ist, erzeugt ein T_{z_o} mit lauter irreduziblen Potenzen. Für $E = L^q(K,\mu)$ sind die Potenzen eines solchen Operators paarweise zueinander orthogonal (1.9)

Weiter zeigt dieses Beispiel, wie wesentlich die Voraussetzung 'irreduzibel' in (2.10) ist. Für eine Einheitswurzel z_o ist T_{z_o} nämlich periodisch, die Resolvente besitzt in $r(T_{z_o}) = 1$ einen Pol der Ordnung 1 mit strikt positivem Residuum, aber nicht von endlichem Rang.

Eine Ergänzung zu (1.8) bildet die anschließende Folgerung aus (2.14) (vergleiche hierzu auch [8], Corollary zu Lemma 2.1). Dabei muß nur die Bemerkung 3 zu (2.4) berücksichtigt werden.

2.15. Folgerung. Es sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und T ein folgen-ordnungsstetiger, bandirreduzibler, positiver Operator auf E mit $F^s(T)_+ = F(T)_+$ und $0 \neq x \in F(T)$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(a) $T^{n+1} \wedge T^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Die Folge $(|T^n(1_E - T)\|x|)_{n\in\mathbb{N}}$ fällt monoton gegen Null.

Beweis. Aus $T^{m+1} \wedge T^m \succ 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ folgt wegen (2.14) die Bandirreduzibilität von T^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit sind die Voraussetzungen von (1.8) erfüllt, und es gilt (b). Mit (1.6) ergibt sich nun die Behauptung.

Als nächstes folgt die im Abschnitt 1 angekündigte Erweiterung von (1.9). Zusammen mit (2.9) stellt sie eine zusätzliche Beziehung her zwischen irreduziblen Verbandsisomorphismen und periodischen, irreduziblen positiven Operatoren.

[2] 2.16. Satz. Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und T ein irreduzibler Verbandsisomorphismus, der $F^s(T)_+ = F(T)_+ \neq \{0\}$ oder $F^s(T')_+ = F(T')_+ \neq \{0\}$ erfüllt. Dann trifft genau eine der beiden folgenden Aussagen zu.

(a) Die Potenzen von T stehen paarweise senkrecht aufeinander.

(b) E ist endlich dimensional und T periodisch mit Zyklengrenze p, wobei $p = \dim E = \min\{n \in \mathbb{N} : T^n = 1_E\}$ ist.

---

[2] siehe [3] auf Seite 18

Beweis. Fall 1 : Für T existiert keine Zyklengrenze. Dann gilt (a) nach (2.13.b).

Fall 2 : T besitzt die Zyklengrenze p, und die Einschränkungen $T^p_{|J_q}$, $1 \le q \le p$, haben jeweils paarweise zueinander orthogonale Potenzen. Dann ist wiederum (a) erfüllt: sei nämlich $x \in E_+$ und x_q die Bandkomponente von x in J_q, $1 \le q \le p$. Wegen (2.13.a) genügt es, $(T^l \wedge T^m)x_q = 0$ zu zeigen für $l = kp+m$ und $k \in \mathbb{N}$. Hierzu sei $n \in \mathbb{N}$ so bestimmt, daß $pn-m > 0$ ist. Dann gilt $T^{np-m}(T^{kp+m} \wedge T^m) \le T^{p(k+n)} \wedge T^{pn}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (für den Verbandsisomorphismus T gilt sogar Gleichheit). Da die Potenzen von $T^p_{|J_q}$ paarweise senkrecht aufeinander stehen, folgt somit $T^{np-m}((T^{kp+m} \wedge T^m)x_q) = 0$, also $(T^{kp+m} \wedge T^m)x_q = 0$, weil T strikt positiv ist.

Fall 3 : T besitzt die Zyklengrenze p, und es gibt ein q so, daß die Potenzen von $T^p_{|J_q}$ nicht senkrecht aufeinander stehen. Nach (2.7) sind alle Potenzen von $T_q := T^p_{|J_q}$ irreduzibel. Unter der Annahme $F^s(T)_+ = F(T)_+ \neq \{0\}$ gibt es einen quasi-inneren T_q-Fixpunkt. Die Voraussetzungen von (1.9) sind somit für T_q erfüllt. Dies bedeutet $\dim J_q = 1$ und $T^p_{|J_q} = 1_{J_q}$, und folglich gilt $\dim J_r = 1$ und $T^r_{|J_r} = 1_{J_r}$ für $1 \le r \le p$.

Sei schließlich $F^s(T')_+ = F(T')_+ \neq \{0\}$ voraussgesetzt. Aus den Erläuterungen vor (1.9) zusammen mit der Bemerkung 4 zu (2.4) kann dann (b) entsprechend hergeleitet werden.

Bemerkung: Mit der Bemerkung 2 zu (2.4) und (2.11) ge-

zeigt werden: Sei T ein bandirreduzibler Verbandsisomorphismus auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E. Dann enthält entweder E keine minimalen Ideale oder T ist periodisch (das heißt in diesem Fall $\dim E < \infty$ (2.9)).

Der Schluß dieses Abschnittes enthält ergänzende Aussagen über das Spektrum $\sigma(T)$ eines irreduziblen, positiven Operators $T \in \mathcal{L}(E)$, E ein Banachverband. Zuvor noch Bemerkungen zu Fixvektoren eines solchen Operators:

Sei $x \in F(T)$. Dann gilt $Tx_{n,q} = x_{n,q+1}$, $q \bmod p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq p(n)$. Ebenso gilt für $x' \in F(T')$ mit der Bemerkung 3 zu (2.4) und den entsprechenden Bezeichnungen $T'x'_{n,q+1} = x'_{n,q}$, $q \bmod p(n)$, $x'_{n,q} \in J'_{n,q}$ Sei nun $0 \neq x \in F(T)_+$ und $0 \neq x' \in F(T')_+$. Dann kann für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ohne Einschränkung $\langle x, x' \rangle = p(n)$ angenommen werden. Dies bedeutet, daß $\langle x_{n,q}, x'_{n,r} \rangle = \delta_{q,r}$, $1 \leq q,r \leq p(n)$, gilt.

Während der letzte Teil dieser Bemerkung für (4.2) benötigt wird, erklärt der erste den Beweisgedanken des folgenden Satzes. Durch 'Drehen' der durch T zyklisch permutierten Komponenten $(x_{n,q})_{1 \leq q \leq p(n)}$ von x um $p(n)$-te Einheitswurzeln lassen sich nämlich weitere Eigenvektoren bilden. Diese besitzen die $p(n)$-ten Einheitswurzeln als zugehörige Eigenwerte. Für $\varepsilon^{p(n)} = 1$ sei zum Beispiel $y = \sum_{1 \leq q \leq p(n)} \varepsilon^{-q} x_{n,q}$; falls $F^s(T)_+ = F(T)_+$ erfüllt ist, so liefert dies alle Eigenvektoren zu den $p(n)$-ten

Einheitswurzeln ([S],V.5.2(iii))). Dieselbe Betrachtung, auf einen beliebigen Eigenvektor von T angewendet, führt zur Drehinvarianz des Punktspektrums $p\sigma(T)$ bzgl. $p(n)$-ter Einheitswurzeln. Wie nun gezeigt wird, hat allgemeiner das gesamte Spektrum $\sigma(T)$ diese Invarianzeigenschaft (wiederum unter der Voraussetzung $F^s(T)_+ = F(T)_+$ ist das Spektrum $\sigma(T)$ bereits drehinvariant unter allen unimodularen Eigenwerten von T ([S],V.5.2(iii))).

2.17. Satz. Es sei E ein Banachverband und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel sowie ε eine $p(n)$-te Einheitswurzel, $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen:

(a) $\sigma(T) = \varepsilon\sigma(T)$.

(b) $p\sigma(T) = \varepsilon p\sigma(T)$.

Existiert keine Zyklengrenze für T, so folgt:

(c) Das Spektrum von T besteht aus konzentrischen Kreisen.

(d) Sei $\alpha \in p\sigma(T)$. Für eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $p(n)$-ten primitiven Einheitswurzeln liegt $(\alpha\varepsilon_n^q)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 1\leq q\leq p(n)}}$ dicht in $p\sigma(T)\cap\{z\in\mathbb{C}: |z| = |\alpha|\}$.

Beweis. Sei $x \in E$. Der durch[3] $Ux := \sum_{1\leq q\leq p(n)} \varepsilon^{-(q+1)} x_{n,q}$ erklärte, stetig invertierbare Operator U zeigt mit $\varepsilon T = U^{-1}TU$ die Ähnlichkeit von εT und T. Dies beweist (a) und (b). Hieraus ergeben sich dann auch die Aussagen (c) und (d).

---

[3] Den Hinweis, den Operator U einzuführen, erhielt ich von Wolfgang Arendt.

Bemerkungen. 1. Um das Spektrum eines irreduziblen, positiven Operators T auf Rotationssymmetrie hin zu untersuchen, genügt es nach (2.17.c) und (2.7), alle Potenzen von T als irreduzibel vorauszusetzen.

2. Für einen irreduziblen, positiven Operator T existiert die Zyklengrenze immer schon dann, wenn sein Spektrum einen von Null verschiedenen, isolierten Punkt enthält (zum Beispiel für quasi-kompaktes T mit $r(T) > 0$ ([4], VIII.8.2); siehe hierzu auch die Übersicht über solche Operatoren in Abschnitt 4, Seite 72). Dann kann $\sigma(T)$ nicht rotationssymmetrisch sein (2.17.c).

3. Allein aus der Bedingung (c) von (2.17) kann weder auf die Existenz noch auf die Nicht-Existenz der Zyklengrenze geschlossen werden. Dies zeigen Beispiel 3 und Beispiel 4.

Jeder AM-Raum erfüllt die Voraussetzungen über E in der anschließenden Folgerung aus (2.17.d) ([S], II. 7.6). Dies gilt ebenso für die Folgenräume l^q, $1 \leq q \leq \infty$, ([S], II. Exercise 28.d). Sie lassen jedoch keine irreduziblen, positiven Operatoren ohne Zyklengrenze zu (2.11).

2.18. Folgerung. Sei E ein Banachverband mit schwachfolgenstetigen Verbandsoperationen und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel. Wenn $F(T)_+ \neq \{0\}$ gilt und T keine Zyklengrenze besitzt, dann liegt der Einheitskreis Γ im Punktspektrum der Biadjungierten T'' .

Beweis. Sei $\lambda \in \Gamma$ und $Tx = x \succ 0$. Nach der Voraussetzung konvergiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geeigneter p(m)-ter Einheitswurzeln, $m \in \mathbb{N}$, gegen λ. Wie die (2.17) vorangestellte Erläuterung zeigte, gehört zu jedem λ_n ein $y_n \in E$, das λ_n zum Eigenwert hat und für das $|y_n| = x$ gilt. Daher gibt es $\sigma(E'',E')$-Häufungspunkte von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E'', und mindestens einer davon muß von Null verschieden sein. Sonst wären $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und nach der Voraussetzung über E dann auch $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ schwache Nullfolgen im Widerspruch zu $|y_n| = x \succ 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ein solcher $\sigma(E'',E')$-Häufungspunkt $x'' \neq 0$ ist ein T''-Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Nun wird mit (2.4) die Aussage von Theorem 6.10 aus der Arbeit [21] von Lotz hergeleitet. Dabei begründet die zweite Aussage von (2.19), warum für eine irreduzible, positive $n \times n$ Matrix mit auf 1 normiertem Spektralradius der Imprimitivitätsindex mit der Zyklengrenze zusammenfällt.

2.19. Satz. Sei T ein irreduzibler, positiver Operator auf einem Banachverband E. Enthält $p\sigma(T)$ eine n-te primitive Einheitswurzel und gilt $F^s(T)_+ = F(T)_+$, so folgt $p(n) = n$.

Falls die Zyklengrenze p existiert, beschränkt sie die Ordnung jeder Einheitswurzel aus $p\sigma(T)$.

Beweis. Sei $Tx = \varepsilon x$, $x \neq 0$ und ε eine n-te primitive Einheitswurzel. Wegen $F^s(T)_+ = F(T)_+$ folgt für ein

festes $1 \leq q \leq p(n)$ aus $T^{p(n)}x_{n,q} = \varepsilon^{p(n)}x_{n,q}$ die Gleichung $T^{p(n)}|x_{n,q}| = |x_{n,q}|$. Nach (2.4) teilt $p(n)$ die Zahl n, und die Einschränkung $T^n_{|J_{n,q}}$ ist irreduzibel. Zusammen mit $\varepsilon^n = 1$ heißt dies, daß $T^n x_{n,q} = x_{n,q}$ sowie $T^n|x_{n,q}| = |x_{n,q}|$ gilt und daher $x_{n,q}$ und $|x_{n,q}|$ linear abhängig sind ([S], V.5.2(i)) (zum Nachweis von V.5.2(i) wird $F^s(T)_+ = F(T)_+$ benötigt). Die Gleichung $T^{p(n)}x_{n,q} = \varepsilon^{p(n)}x_{n,q} = x_{n,q}$ liefert dann die gewünschte Beziehung $p(n) = n$ und somit auch die zweite Aussage.

Bemerkung. Für 'Zyklengrenze' hätte also auch der Begriff 'Imprimitivitätsindex' stehen können. Er gibt für eine irreduzible, positive $n \times n$ Matrix A die Anzahl der peripheren Eigenwerte von A an ([S], I.6.5(iv)).
Im nicht-endlichdimensionalen Fall gibt es jedoch irreduzible, positive Operatoren, deren Zyklengrenzen existiert, deren periphere Eigenwerte aber im Einheitskreis dicht liegen (Beispiel 4). Mit derselben Begründung (und demselben Beispiel) wird hier ein positiver Operator, dessen Potenzen alle irreduzibel sind, nicht wie im endlichdimensionalen Fall 'primitiv' genannt ([S], I.7.1).

Den Einfluß der Nicht-Orthogonalität aller Potenzen eines irreduziblen, positiven Operators auf sein Spektrum klärt der letzte Satz dieses Abschnittes. Sein Beweis beruht auf (1.8); angewendet wird er in Abschnitt 3, und zwar in (3.8).

2.20. Satz. Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ irreduzibel mit $F^s(T)_+ = F(T)_+$. Wenn es nicht-orthogonale Potenzen von T gibt, dann existiert die Zyklengrenze p, und das unimodulare Punktspektrum enthält höchstens die p-ten Einheitswurzeln.

Beweis. Zunächst besagt (2.13.b), daß T die Zyklengrenze $p \in \mathbb{N}$ besitzt.

Sei nun $Tx = \varepsilon x$, $x \neq 0$, $|\varepsilon| = 1$; also $T|x| = |x|$ wegen $F^s(T)_+ = F(T)_+$.

Im Fall $p = 1$, also bei Irreduzibilität aller Potenzen von T (2.7) sind die Voraussetzungen von (1.8) erfüllt, und es gilt die Bedingung (1.8.b) für ein $m \in \mathbb{N}$. Die Ungleichung $|T^n(1_E - T^m)x| \leq |T^n(1_E - T^m)|\,|x|$, $n \in \mathbb{N}$, führt daher zusammen mit der Ordnungsstetigkeit jedes $x' \in E'$ zu $\langle x, x' \rangle (1 - \varepsilon^m) \lim_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon^n = 0$. Diese Beziehung kann aber nur für $\varepsilon^m = 1$ gelten, aus (2.19) folgt somit $\varepsilon = 1$.

Der allgemeine Fall $p > 1$ wird zurückgeführt auf den Fall $p = 1$. Zunächst gibt es ein $1 \leq q \leq p$ so, daß die Potenzen der Einschränkung $T^p|_{J_q}$ nicht senkrecht aufeinanderstehen (Die Potenzen von T stünden ansonsten im Widerspruch zur Voraussetzung schon paarweise senkrecht aufeinander, wie im Fall 2 des Beweises zu (2.16) bereits gezeigt wurde). Die Bandkomponente x_q für ein solches q genügt $T^p x_q = \varepsilon^p x_q$ und wegen

$F^s(T)_+ = F(T)_+$ auch $T^p|x_q| = |x_q|$. Außerdem sind nach (2.7) alle Potenzen von $T^p|_{J_q}$ irreduzibel. Der Fall $p = 1$ zeigt daher $\varepsilon^p = 1$, also bilden die p-ten Einheitswurzeln das unimodulare Punktspektrum.

3. HARRIS-OPERATOREN

Der Begriff 'Harris-Prozeß' stammt aus der Theorie der Markoff-Prozesse ([31], Kapitel 3, und [7], Kapitel 5). Nach [7] kann ein verbands- und operatorentheoretischer Zugang wie folgt beschrieben werden:

Es sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband. Diejenigen Operatoren auf E, die das von $E'\otimes E$ im Vektorverband $\mathscr{L}^r(E)$ der regulären Operatoren auf E erzeugte Band $(E'\otimes E)^{\perp\perp}$ bilden, heißen Kernoperatoren. Die Bandkomponente von $T\in\mathscr{L}^r(E)$ in $(E'\otimes E)^{\perp\perp}$ wird Kernkomponente genannt; K_n bezeichnet die Kernkomponente von T^n und $R_n := T^n - K_n$ die dazu orthogonale Komponente, $n\in\mathbb{N}$. Unter einem Harris-Operator wird nun ein $T\in\mathscr{L}^r(E)$ verstanden, für das nicht alle K_n verschwinden. Der Grund für die Bezeichnung 'Kernoperator' für Operatoren aus $(E'\otimes E)^{\perp\perp}$ ist die von Nagel und Schlotterbeck [27] gelieferte Charakterisierung von $(E'\otimes E)^{\perp\perp}$; in konkreten Funktionenräumen sind Kernoperatoren genau die durch einen meßbaren Kern erklärten Operatoren ([S], IV.9.7).

Beispiele. 1. Jeder reguläre Operator auf l^q, $1 \le q < \infty$, ist ein Kernoperator.

2. Jeder beschränkte Operator T auf l^∞ ist ein Kernoperator: ohne Einschränkung kann T positiv angenommen werden ([S], IV.1.5). Sei $\mu\in(l^\infty)'_+$ und bezeichne e die Einsfunktion auf $\mathbb{N}$. $T\wedge\mu\otimes e = 0$ bedeutet $\inf_{0\le f\le e}(Tf+\mu(e-f)e) = 0$. Dies besagt:

$\inf_{0\le f\le e} (T'\delta_n(f)+\mu(e-f)) = 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ (δ_n das Punktmaß in $n\in\mathbb{N}$). Folglich gilt $T'\delta_n \perp \mu = 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Weiterhin sind die ordnungsstetigen Operatoren auf l^∞ genau die Matrixoperatoren auf l^∞.

3. Die schwach-kompakten Operatoren auf AL- oder AM-räumen, deren ordnungsstetige Linearformen die Punkte trennen, sind Kernoperatoren ([S], IV.9.9).

4. Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und T_φ der durch eine maßerhaltende Abbildung $\varphi : X \longrightarrow X$ erklärte Verbandshomomorphismus auf $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ ([S], III.9 Example 1). Wenn $\mathcal{A}$ die einpunktigen Mengen enthält und μ außerdem diffus ist, dann ist T_φ kein Harris-Operator (vergleiche (2.16), (3.5)). Zusammen mit Beispiel 3 ergeben sich hieraus weitere Beispiele von Harris-Operatoren.

Zunächst wird in den beiden Hilfssätzen (3.1) und (3.2) auf die algebraische Struktur der Kernoperatoren bzw. auf die Beziehungen der Potenzen eines positiven Operators zu den zugehörigen Kernkomponenten eingegangen; ein anderer Hilfssatz gibt dann nützliche Bedingungen dafür an, daß T ein Harris-Operator ist.

3.1. Hilfssatz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm. Dann bilden die Kernoperatoren in der Banachverbandsalgebra $\mathcal{L}^r(E)$ ein zweiseitiges Ideal $(E'\otimes E)^{\perp\perp}$.

Der Beweis hierzu folgt aus der Ordnungsstetigkeit von T und aus der Definition von $(E' \otimes E)^{\perp\perp}$ ([17], Lemma 4.2.5)

3.2. Hilfssatz. ([7], Seite 56) Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $K_{m+n} \geq K_m T^n$ und $K_{m+n} \geq T^m K_n$.

Beweis. Wegen $0 \leq T^{m+n} = T^m K_n + T^m R_n = K_{m+n} + R_{m+n}$ ist nach (3.1) $T^m K_n \leq K_{m+n}$. Die andere Ungleichung folgt analog.

Bemerkung. Zwar lassen sich (3.1) und (3.2) allgemeiner formulieren, sind aber hier nur für Banachverbände mit ordnungsstetiger Norm nötig. Außerdem werden andere Ungleichungen, etwa $R_{m+n} \leq R_m R_n$, im weiteren nicht verwendet.

3.3. Hilfssatz. Es sei T ein irreduzibler, positiver Operator auf einem Banachverband E mit ordnungsstetiger Norm. Für $\lambda > r(T)$ bezeichne Q_λ die Kernkomponente von $R(\lambda, T)$. Dann sind gleichwertig:

(a) T ist ein Harris-Operator.

(b) Zu jedem $0 < x \in E$ gibt es ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $K_{n(x)} x > 0$.

(c) Für jedes $0 < x \in E$ ist $Q_\lambda x$ ein quasi-innerer Punkt in E.

Beweis. Sei $0 < x \in E$ und $\lambda > r(T)$. Aus der Neumann-Reihe $R(\lambda, T) = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-(n+1)} T^n$ folgt $TR(\lambda, T) \leq \lambda R(\lambda, T)$ ([5], Seite 323). Wegen der Irreduzibilität von T ist damit $y := R(\lambda, T)x$ ein quasi-innerer Punkt in E. Außerdem liefert die Neumann-Reihe wegen (3.2) die Un-

gleichung $\sum_{n\geq o} \lambda^{-(n+1)} K_{m+n}x \geq K_m y$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.
Dies zeigt die Äquivalenz von (a) mit (b) .

(a) $\Longrightarrow$ (c): Aus (3.1) und $TR(\lambda,T) \leq \lambda R(\lambda,T)$ folgt zunächst (1) $TQ_\lambda \leq \lambda Q_\lambda$ und (2) $Q_\lambda T \leq \lambda Q_\lambda$.

Sei nun $0 < x \in E$ und $\langle Q_\lambda x, x' \rangle = o$ für ein $x' \in E'_+$. Wegen (2) ist $\{ y \in E: \langle Q_\lambda |y|, x' \rangle = o \}$ ein T-Ideal und außerdem von Null verschieden, also gleich E , weil T irreduzibel ist. Somit gilt $\langle Q_\lambda y, x' \rangle = o$ für alle $y \in E$. Andererseits gibt es nach der Voraussetzung in (a) ein $0 < y \in E$ mit $Q_\lambda y \neq 0$. Deshalb muß $Q_\lambda x > 0$ sein.

Schließlich zeigt (1) zusammen mit der Irreduzibilität von T , daß $Q_\lambda x$ ein quasi-innerer Punkt in E ist.

Die Implikation (c) $\Longrightarrow$ (a) folgt aus der Definition von Q_λ .

Bemerkung. Dieser Hilfssatz faßt Ergebnisse von Foguel ([7] ,Theorem V.E) und Krieger ([17],Beweis zu Folgerung 4.2.1) zusammen.

Die Bedingung (b) von (3.3) führt nun zu einer Folgerung, die zum Beweis von (4.2) benötigt wird; mit Hilfe der Bedingung (c) wird in (3.8) $r(T) > o$ nachgewiesen.

3.4. Folgerung. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ ein irreduzibler Harris-Operator und $J \neq \{0\}$ ein T^n-Ideal für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Einschränkung $T^n_{|J}$ von T^n auf J ein Harris-Operator auf J .

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es ein $0 \lneq x \in J$ und folglich ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $K_{n(x)} x \gneq 0$ (3.3.b). Dabei kann wegen (3.2) und der strikten Positivität von T angenommen werden, daß n ein Teiler von $n(x)$ ist. Folglich bleibt J unter $K_{n(x)}$ invariant. Das beweist die Aussage, weil die Einschränkung $K_{n(x)|J}$ ein Kernoperator auf J ist.

Bemerkung. Die Frage, ob für $J \neq E$ unter den Voraussetzungen von (3.4) auch der auf E/J kanonisch induzierte Operator T^n_J ein Harris-Operator auf E/J ist, beantwortet (2.5). Hiernach ist $J^\perp$ ebenfalls ein T^n-Ideal.

Nun wird die im Anschluß an (2.13) bereits angekündigte und für das weitere folgenreiche verbandstheoretische Eigenschaft eines irreduziblen, positiven Harris-Operators hergeleitet. Sie verdeutlicht insbesondere den Gegensatz zu den Verbandsisomorphismen (siehe (2.16)).

3.5.Satz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und T ein irreduzibler, positiver Harris-Operator auf E. Dann stehen die Potenzen von T nicht senkrecht aufeinander.

Beweis. Nach den Erläuterungen vor (1.9) kann ohne Einschränkung $E = L^1(K,\mu)$ und $E' = C(K)$ vorausgesetzt werden für ein strikt positives Radonmaß μ auf einem geeigneten kompakten, Stoneschen Raum K.

Angenommen, die Potenzen von T stehen paarweise senk-

recht aufeinander. Dies gilt dann auch für die Potenzen von T' ([S], Exercise IV. 2.d). Nach (1.4.b) gibt es also eine in K dichte Teilmenge $D \subset K$ so, daß für jedes $t \in D$ die Folge $(T''^{l}\delta_t)_{l \in \mathbb{N}}$ aus paarweise zueinander orthogonalen Radonmaßen besteht. Da T ein Harris-Operator ist, also $T'^{n} \wedge \mu \otimes e \succ 0$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ - e die Einsfunktion auf K -, bedeutet dies wegen (1. 5.d) $T''^{n}\delta_t \wedge \mu \succ 0$ für ein $t \in D$. Bezeichnet f die ordnungsstetige Bandkomponente von $T''^{n}\delta_t (\succ 0)$, so existiert wegen der Irreduzibilität von T ein $m \in \mathbb{N}$ mit $0 \prec f \wedge T^m f$. Aus $0 \prec f \leq T''^{n}\delta_t$ und $0 \prec T^m f \leq T''^{m+n}\delta_t$ ergibt sich nun ein Widerspruch zur paarweisen Orthogonalität der $T''^{l}\delta_t$, $l \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. Die Beweisidee zu (3.5) entnahm ich dem Beweis zu 4.1 in [30].

Als Folgerung aus (2.13.b) ergibt sich:

3.6. Folgerung. Für jeden irreduziblen, positiven Harris-Operator auf einem Banachverband mit ordnungsstetiger Norm existiert eine Zyklengrenze.

Bemerkung. Auf einem anderen Weg erhielt Moy ([24], Theorem 2) die Aussage von (3.6) für $E = L^1(X, \alpha, \mu)$, (X, α, μ) σ-endlicher Maßraum.

Bevor in (3.8) auf das periphere Spektrum eines irreduziblen, positiven Harris-Operators eingegangen wird,

noch eine Folgerung aus (3.6). Ihre Aussage ist wesentlich für die Beweise zu (4.5) und (4.6).

3.7. Folgerung ([13], Proposition 1). Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ ein irreduzibler Harris-Operator. Dann gibt es beliebig große $n \in \mathbb{N}$ und kompakte Kernoperatoren C_n auf E mit $0 < C_n \leq T^n$, wobei T^n irreduzibel ist.

Beweis. Da nach der Voraussetzung T ein Harris-Operator ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sowie $0 < x \in E$ und $0 < x' \in E'$ mit $Q := T^m \wedge x' \otimes x > 0$.

Sei $N := \{y \in E: Q|y| = 0\}$ und $z \in E$ mit $Qz > 0$. Aus der Annahme, daß $T^l Qz$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ in dem abgeschlossenen Ideal N liegt, folgt $0 < TR(\lambda, T)Qz \in N$ für $\lambda > r(T)$, und wegen der Irreduzibilität von T dann $N = E$. Dies widerspricht aber $Q > 0$. Deshalb gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $QT^lQ > 0$. Von diesem Operator wird nun die Kompaktheit nachgewiesen.

Als AM-Raum betrachtet, besitzt E_x die Dunford-Pettis Eigenschaft ([S], II.9.9). Daher überführt die schwach-kompakte Einbettungsabbildung $i : E_x \longrightarrow E$ schwach-konvergente Folgen (im AM-Raum E_x) in konvergente Folgen in E. Also hat auch $Q = i \circ Q_x$ diese Eigenschaft, wobei $Q_x y = Qy$, $y \in E$, gesetzt wird. Dies zeigt die Kompaktheit von QT^lQ, weil T^lQ schwach-kompakt ist ([S], II.5.10(f)).

Der einfacheren Schreibweise wegen wird QT^lQ als

Q bezeichnet. Nach (3.6) existiert die Zyklengrenze p von T . Weiter liegen für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $kp \geq m$ die kompakten, positiven, von Null verschiedenen Operatoren $C_n := T^{n-m}Q$, $n = kp + 1$, nach (3.1) in $(E' \otimes E)^{\perp\perp}$, und es gilt $T^n = C_n + T^{n-m}(T^m - Q)$. Außerdem ist T^n nach (2.8) irreduzibel.

Bemerkung. Falls E und E' ordnungsstetige Norm besitzen (zum Beispiel für einen reflexiven Banachverband E), dann ist das zu Anfang des Beweises eingeführte Q schon kompakt ([28] , Lemma 4) und ungleich Null.

Eine Erweiterung eines Theorems von Ando-Krieger, dargestellt in der Form von Schaefer ([S],V.6.5), steht im ersten Teil des folgenden Satzes. Der Beweis wird auf den bekannten Fall zurückgeführt. Der zweite Teil von (3.8) folgt aus (2.20) und (3.5).

3.8. Satz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ ein irreduzibler, positiver Harris-Operator. Dann gilt $r(T) > 0$.

Wird zusätzlich $F^s(T)_+ = F(T)_+$ und $r(T) = 1$ angenommen, so enthält das unimodulare Punktspektrum höchstens die p-ten Einheitswurzeln. Dabei bezeichnet p die Zyklengrenze.

Beweis. Nach dem Spektralabbildungssatz ([4],VII.3.11) gilt $r(T) = r(TR(\lambda,T))$ für $\lambda := r(T)+1$, und außerdem ist $r(TQ_\lambda) \leq r(TR(\lambda,T))$ für die Kernkomponente Q_λ von

$R(\lambda, T)$. Die strikte Positivität von T' führt zusammen mit (3.3.c) und Theorem II.6.3 in [S] zu $\langle TQ_\lambda x, x' \rangle \succ o$ für alle $x \succ 0$ und $x' \succ 0$. Somit ist insbesondere TQ_λ irreduzibel. Weiterhin ist TQ_λ nach (3.1) ein Kernoperator, und Theorem V.6.5 in [S] liefert deshalb $r(TQ_\lambda) \succ o$, also $r(T) \succ o$.

In (3.12) wird auf den zweiten Teil von (3.8) zurückgegriffen, um die entsprechende Aussage für einen positiven Kernoperator herzuleiten. Dies geschieht mit Hilfe eines Zerlegungssatzes (3.10), der nun beschrieben wird. Dazu sei $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$, E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, und E_S das größte Ideal in E , auf dem K_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ verschwindet; das bedeutet, daß $E_S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in E: K_n|x| = 0\}$ gilt. Somit ist E_S ein T-Ideal wegen $K_n T \leq K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (3.2). Weiter geht aus der Definition von E_S hervor, daß keine der Einschränkungen von T auf ein in E_S enthaltenes T-Ideal ein Harris-Operator ist. Dies kennzeichnet ebenfalls E_S . Das zu E_S komplementäre Ideal $(E_S)^\perp =: E_H$ besitzt dann die Eigenschaft, daß die Einschränkung von T auf jedes von Null verschiedene T-Ideal in E_H ein Harris-Operator ist. Damit E_H auch ein T-Ideal ist, wird nun gefordert, daß T mit jedem T-Ideal J auch das komplementäre Ideal $J^\perp$ invariant läßt. In den folgenden Fällen ist dies erfüllt:

(a) Es gibt eine T-invariante schwache Ordnungseinheit, und es gilt $F^s(T)_+ = F(T)_+$ oder $F_s(T)_+ = F(T)_+$.

(b) Es gibt eine T'-invariante schwache Ordnungseinheit, und es gilt $F^s(T')_+ = F(T')_+$ oder $F_s(T')_+ = F(T')_+$.

Der Fall (a) kann wie folgt bewiesen werden: sei x eine T-invariante schwache Ordnungseinheit und sei J ein T-Ideal . Dann gilt $x_J \in F_s(T)_+$ für die Bandkomponente x_J von x in J , weil $x_J = \sup\{ y: 0 \le y \le x \ , \ y \in J\}$ und Tx_J in J liegen. Damit ist auch die Bandkomponente $x-x_J$ von x in $J^\perp$ ein T-Fixpunkt. Durch Übergang zu E' ergibt sich (b) ebenso.

Nun wird gezeigt, daß unter der zuvor genannten Bedingung ein von Null verschiedenes E_H in minimale T-Ideale zerlegt werden kann. Der Beweis des zunächst folgenden Hilfssatzes benutzt eine bekannte Methode aus der Maßtheorie, nämlich die Konstruktion von Mengen zu vorgegebenem Maß.

3.9. Hilfssatz. Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm , mit einer schwachen Ordnungseinheit u und mit einer strikt positiven Linearform $x' \in E'$. Weiter sei T ein positiver Operator auf E , der mit jedem T-Ideal $J \subset E$ auch $J^\perp$ invariant läßt. Enthält E kein minimales T-Ideal, so gibt es zu jedem $o < \varepsilon \le \langle u,x' \rangle$ ein $0 \le v \le u$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\langle v,x' \rangle = \varepsilon$ und $u-v \wedge v = 0$.

(b) $\overline{E}_v$ ist ein T-Ideal.

Beweis. Nach der Voraussetzung über T läßt sich die Menge $\mathfrak{J}(T)$ der T-Ideale in E darstellen als eine vollständige Boolsche Teilalgebra $\mathcal{A}$ in der Menge der charakteristischen Elemente $B_u = \{x \in E: x \wedge (u-x) = 0\}$ zu dem Ordnungsintervall $[0, u]$ ([S], II.2.12). Dabei entspricht jedem $x \in \mathcal{A}$ genau dasjenige $J \in \mathfrak{J}(T)$, dessen Bandprojektion P_J die Gleichung $P_J u = x$ erfüllt.

Ohne Einschränkung kann $\langle u, x' \rangle = 1$ angenommen werden. Da $\mathcal{A}$ nach der Voraussetzung kein Atom enthält, gibt es zu jedem $0 \neq y \in \mathcal{A}$ eine streng monoton fallende Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0,y] \cap \mathcal{A}$. Wegen $o < \min\limits_{1 \leq m \leq n} \langle y_m - y_{m+1}, x' \rangle < \frac{1}{n}$ läßt sich also zu jedem $0 \neq y \in \mathcal{A}$ und zu jedem $o < \delta \leq 1$ ein $z \in [o,y] \cap \mathcal{A}$ finden, das der Ungleichung $o < \langle z, x' \rangle < \delta$ genügt. Dies wird nun benutzt zur Konstruktion einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ mit $x_l \wedge x_m = 0$ für $l \neq m$ und $\sum\limits_{n \in N} \langle x_n, x' \rangle = \varepsilon$. Wegen der (Folgen-)Ordnungsstetigkeit von x' und der Vollständigkeit von $\mathcal{A}$ ergibt sich dann mit $v := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ die Behauptung.

Seien nun n paarweise zueinander orthogonale Vektoren $(x_m)_{1 \leq m \leq n} \subset \mathcal{A}$ mit $\sum\limits_{1 \leq m \leq n} \langle x_m, x' \rangle \leq \varepsilon$ bereits bestimmt. In

$$\mathcal{A}_n := \{x \in \mathcal{A}: x \leq u - \sum_{1 \leq m \leq n} x_m \text{ und } \langle x + \sum_{1 \leq m \leq n} x_m , x' \rangle \leq \varepsilon\}$$

wird durch $\langle x_{n+1}, x' \rangle \geq \frac{1}{2} \sup\limits_{x \in \mathcal{A}_n} \langle x, x' \rangle$ das nächste Folgenglied x_{n+1} festgelegt. Für die auf diese Weise konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gilt $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, x' \rangle = \varepsilon$ (die Annahme $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, x' \rangle < \varepsilon$ führt zu einem $0 < w \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$; dies bedeutet $\langle x_n, x' \rangle \geq \frac{1}{2} \langle w, x' \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\langle w, x' \rangle = o$ im Widerspruch zur strikten Positivität von x').

3.10. Satz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und T ein positiver Operator auf E, der mit jedem T-Ideal $J \subset E$ auch $J^{\perp}$ invariant läßt. Dann ist E die ordnungsdirekte Summe der T-Ideale E_H und E_S.

Im Fall $E_H \neq \{0\}$ wird E_H von allen denjenigen minimalen T-Idealen $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ erzeugt, auf denen die Einschränkung von T ein Harris-Operator ist.

Wenn E eine schwache Ordnungseinheit enthält, so ist $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ höchstens abzählbar.

Beweis. Für den Fall $E_H \neq \{0\}$ genügt es, ein minimales T-Ideal J in E_H nachzuweisen und diesen Schluß dann für $E_H \cap J^{\perp}$ zu wiederholen, sofern $E_H \cap J^{\perp} \neq \{0\}$ gilt. Nach den (3.9) vorangestellten Erläuterungen wird auf diese Weise $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert. Für eine schwache Ordnungseinheit $u \in E$ und die Bandkomponenten u_α von u in E kann A wegen der paarweisen Orthogonalität der u_α dann höchstens abzählbar sein ([S], II.5.10. Corollary 1).

Nun zu dem Nachweis eines minimalen T-Ideals in $E_H \neq \{0\}$: Nach der Definition von E_H gibt es $0 \prec x \in E_H$, $0 \prec x' \in (E_H)'$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n \wedge x' \otimes x \succ 0$, wobei ohne Einschränkung $T'E'_x \subset E'_x$ angenommen werden kann; ansonsten gelten $T^n \wedge y' \otimes x \succ 0$ und $T'y' \leq \lambda y'$ für $y' = R(\lambda, T')x'$ und ein $\lambda \succ r(T)$. Somit sind das Null-Ideal $N := \{y \in E : \langle y, x' \rangle = 0\}$ und nach der Voraussetzung

also auch $N^{\perp}$ T-Ideale. Dann kann aber x aus $N^{\perp}$ gewählt werden. Folglich ist die strikte Positivität von x' keine einschränkende Annahme. Schließlich kann noch $TE_x \subset E_x$ und $(T^n \wedge x' \otimes x)x \succ 0$ vorausgesetzt werden. Damit sind - mit x als schwacher Ordnungseinheit in $\overline{E}_x$ und $x'|\overline{E}_x$ als ordnungsstetiger, strikt positiver Linearform auf $\overline{E}_x$ - die Voraussetzungen von (3.9) für die Einschränkung $T|\overline{E}_x$ erfüllt.

Aus der Annahme, daß E_H und dann insbesondere $\overline{E}_x$ kein minimales T-Ideal enthält, wird nun ein Widerspruch hergeleitet. Dazu wird nach ([S],II.7.4) das Hauptideal E_x aufgefaßt als $C(K)$, K kompakt und Stonesch. Hierbei entspricht x der Einsfunktion e auf K, und $x'|E_x$ erklärt ein positives Radonmaß $0 \prec \mu \in C(K)'$. Wegen $g := (U^n \wedge \mu \otimes e)e \succ 0$, wobei U die Einschränkung von T auf $E_x = C(K)$ bezeichnet, gilt $U^n f + \mu(e-f)e \geq g$ für jedes $0 \leq f \leq e$. Zu g läßt sich ein $0 \prec \gamma \prec 2\mu(e)$ und eine nicht-leere, offen-abgeschlossene Menge $A \subset K$ bestimmen mit $\gamma\chi_A \leq g$ (χ_A die charakteristische Funktion auf K). Sei $0 \leq h \leq e$ und $\mu(h) \geq \mu(e) - \frac{\gamma}{2}$, also $0 \leq \mu(e-h) \leq \frac{\gamma}{2}$. Aus $U^n h + \mu(e-h)e \geq \gamma\chi_A$ folgt hiermit $U^n h \geq \gamma\chi_A - \frac{\gamma}{2} e$ und deshalb $U^n h \geq \frac{\gamma}{2}\chi_A$. Wird mit f die stetige Funktion $0 \prec \gamma\chi_A \in C(K)$ bezeichnet und wird $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$ sowie $\delta = \mu(e) - \varepsilon$ gesetzt, dann besagt das vorangehende:

(H) Wenn $h \in C(K)$ den Beziehungen $0 \leq h \leq e$ und $\mu(h) \geq \delta$ genügt, so gilt $U^n h \geq \varepsilon f$.

Andererseits führt die Annahme, daß $\overline{E}_x$ kein minimales T-Ideal enthält nach (3.9) zu orthogonalen, positiven Zerlegungen $(x_{l,m})_{1\le l\le 2^m}$ von x mit $\langle x_{l,m}, x'\rangle = \frac{1}{2^m}$ und $T(\overline{E}_{x_{l,m}}) \subset \overline{E}_{x_{l,m}}$, $1 \le l \le 2^m$, $m \in \mathbb{N}$ (hierbei bedeutet die Annahme $\langle x, x'\rangle = 1$ keine Einschränkung). Sei nun $1-\delta \ge \frac{1}{2^m}$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$ und werde $x_{l,m}$ als stetige Funktion $f_{l,m}$ auf K betrachtet. Auf dem Träger $Tr(f_{l,m}) \subset K$ von $f_{l,m}$ verschwindet $U^n(\sum_{\substack{1\le k\le 2^m \\ k\ne l}} f_{k,m})$. Da wegen (H) die Bedingung $\mu(\sum_{\substack{1\le k\le 2^m \\ k\ne l}} f_{k,m}) \ge \delta$ $U^n(\sum_{\substack{1\le k\le 2^m \\ k\ne l}} f_{k,m}) \ge \varepsilon f$ zur Folge hat, der Träger von $0 < f$ also in $K \setminus Tr(f_{l,m})$ liegt, muß für mindestens ein $1 \le l \le 2^m$ die Ungleichung $\mu(\sum_{\substack{1\le k\le 2^m \\ k\ne l}} f_{k,m}) < \delta$ gelten. Dies liefert $\mu(f_{l,m}) > 1-\delta \ge \frac{1}{2^m}$ und widerspricht somit $\mu(f_{l,m}) = \frac{1}{2^m}$.

Bemerkungen. 1. Feldman ([6], Theorem 1 und Corollary) zeigt die (3.10) entsprechende Aussage für eine sub-markoffsche Übergangswahrscheinlichkeit auf einem beliebigen Zustandsraum $(X, \mathcal{A})$. Diese wird bezüglich eines festen σ-endlichen (positiven) Maßes μ auf $(X, \mathcal{A})$ punktweise in den μ-absolutstetigen und den dazu μ-singulären Anteil zerlegt (deshalb E_S). Hierbei braucht im allgemeinen der μ-absolutstetige Anteil keine Darstellung durch einen meßbaren Kern zu besitzen (siehe [6], Remark).

Dennoch kann X bezüglich einer σ-Teilalgebra $\mathcal{A}(\mu)$ - diese spiegelt die von T in (3.10) geforderte Eigenschaft wider - auf eine in (3.10) beschriebene Weise zerlegt werden. Der Beweis von (3.10) benutzt ein Argument von Feldman, hier wiedergegeben als (3.9).

2. Für einen σ-endlichen Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ und einen kontraktiven, positiven und konservativen Kernoperator T auf $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ stammt die Aussage aus (3.10) von Moy ([22],Theorem 2.1).

3. Die im Beweis von (3.10) hergeleitete Bedingung (H) - formuliert für E und T - ist notwendig und hinreichend dafür, daß ein positiver Harris-Operator T vorliegt. Dies wird in (3.14) gezeigt.

Zum Beweis der anschließenden Folgerung aus (3.10) genügt es, T auf ein geeignetes E_α einzuschränken, um dann (3.5) bzw. (3.8) anwenden zu können.

3.11. Folgerung. Mit den Voraussetzungen über E und T wie in (3.10) gilt:

(a) Sei $E_H \neq \{0\}$ und ε ein unimodularer Eigenwert mit einem Eigenvektor, dessen Bandkomponente in E_H nicht verschwindet. Wenn $F^s(T)_+ = F(T)_+$ gilt oder sowohl die Wachstumsbedingung (G) als auch $r(T) = 1$ erfüllt sind, dann erzeugt ε eine endliche Gruppe von Eigenwerten.

(b) Wenn T lauter paarweise zueinander orthogonale Potenzen besitzt, dann ist $E_H = \{0\}$.

Die vorangehende Folgerung läßt sich insbesondere anwenden auf einen positiven Kernoperator $0 \neq T \in \mathcal{L}(E)$, E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm. Daher gibt es nach (3.11.b) nicht-orthogonale Potenzen von T, falls T der in (3.10) verlangten Bedingung genügt. Die Aussage von (3.11.a) trifft allerdings auf den Kernoperator T auch ohne diese Bedingung zu. Hierfür zunächst eine Vorbemerkung: Sei $J \subset E$ ein T-Ideal. Dann sind die Einschränkung $T_{|J}$ von T auf J sowie der von T auf E/J kanonisch induzierte Operator T_J wieder Kernoperatoren. Dies folgt aus der Definition eines Kernoperators, wenn berücksichtigt wird, daß J und $E/J \cong J^{\perp}$ Projektionsbänder in E sind ([S], II.5.14.d). Zum Beweisprinzip des anschließenden Satzes wie auch zum Begriff '(G)-auflösbar' siehe Lotz ([21], Theorem 4.9).

3.12. Satz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ ein Kernoperator mit nichtleerem unimodularen Punktspektrum. Dann gilt:

(a) Wenn $F^s(T)_+ = F(T)_+$ erfüllt ist, dann besteht das unimodulare Punktspektrum von T aus einer Vereinigung endlicher Gruppen von Einheitswurzeln.

(b) Wenn T (G)-auflösbar ist und $r(T) = 1$ gilt, dann besteht das periphere Punktspektrum aus Einheitswurzeln.

Beweis. Sei $Tx = \varepsilon x$, $x \neq 0$, $|\varepsilon| = 1$.

(a) Aus $T|x| \geq |x|$ folgt $T|x| = |x|$ nach der Vor-

aussetzung. Die Einschränkung U von T auf das von $|x|$ erzeugte, abgeschlossene Ideal $\overline{E}_{|x|}$ ist nach der Vorbemerkung auch ein Kernoperator. Insbesondere läßt U den quasi-inneren Punkt $|x|$ von $\overline{E}_x$ invariant, und es gilt $F^s(U)_+ = F(U)_+$. Damit sind die Voraussetzungen von (3.11) erfüllt (siehe Bedingung (a) vor (3.9)), und mit (3.11.a) folgt die Behauptung.

(b) Zunächst genüge T der Wachstumsbedingung (G) . Dann gibt es wegen $T|x| \geq |x| \neq 0$ ein $x' \in F(T')_+$ mit $\langle |x|, x' \rangle \neq o$ ([S], V.4.8). Bezeichnet N das Nullideal $\{y \in E: \langle |y|, x' \rangle = o\}$ von x' , so induziert T nach der vorangehenden Bemerkung einen Kernoperator T_N auf E/N . Für das kanonische Bild $\hat{x}$ von x in E/N gilt $T_N \hat{x} = \varepsilon \hat{x}$, $\hat{x} \neq 0$, und außerdem $F^s(T_N)_+ = F(T_N)_+$, da x' eine strikt positive, $(T_N)'$-invariante Linearform auf E_N induziert. Damit sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt, und ε ist somit eine Einheitswurzel.

Sei nun T (G)-auflösbar, das heißt, es gibt eine Kette von T-Idealen $(E_m)_{o \leq m \leq n}$ mit $\{0\} = E_o \subset E_1 \ldots \subset E_n = E$ so, daß der auf E_m/E_{m-1} induzierte Operator T_m die Wachstumsbedingung (G) für jedes $1 \leq m \leq n$ erfüllt. Für $n = 1$ wurde (b) eben gezeigt.

Der Fall $n > 1$ wird nun mit Induktion über n gezeigt. Die Induktionsvoraussetzung besagt dann, daß (b) für den Kernoperator $T_{|E_{n-1}}$ (Vorbemerkung) zutrifft. Weiter liegt ε in $p\sigma(T_n) \cup p\sigma(T_{|E_{n-1}})$ ([21], Lemma 4.8). Nach dem Induktionsanfang beziehungsweise der Induktionsvoraussetzung ist deshalb ε eine Einheitswurzel.

Bemerkungen. 1. Fréchet ([11],Chapitre 1) zeigte für einen durch einen stochastischen Kern erklärten Kernoperator T auf $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ ($X \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\mathcal{A}$ die Borelalgebra auf X und μ das Lebesgue-Maß auf $(X,\mathcal{A})$), daß sein peripheres Punktspektrum nur aus Einheitswurzeln besteht, falls mindestens ein T^n durch einen beschränkten Kern festgelegt ist. Wie aus (3.12.b) hervorgeht, kann auf diese Bedingung verzichtet werden (Aus ihr folgt nämlich insbesondere, daß jedes $o \neq \lambda$ aus $\sigma(T)$ ein Pol der Resolvente von T ist ([S],V.6 Example 5, V.Exercise 5.d). Das führt schon zur Zyklizität des peripheren (Punkt)Spektrums ([21], Theorem 4.10; siehe auch [11],Chapitre 2).

2. Die Voraussetzungen über E und T seien wie in (3.12) mit der Ausnahme, daß nun für T' das unimodulare Punktspektrum nicht leer ist. Wenn außerdem $F^s(T')_+ = F(T')_+$ gilt, dann läßt sich die (3.12.a) entsprechende Aussage über T' zeigen: sei $T'x' = \varepsilon x'$, $x' \neq 0$, $|\varepsilon| = 1$. Wegen $T'|x'| = |x'|$ ist das von $|x'|$ in E' erzeugte Hauptband $B(|x'|)$ T'-invariant und außerdem $\sigma(E',E)$-abgeschlossen ([S],II.5.10 Corollary 2). Daher induziert T auf $E/B(|x'|)^\circ$ einen Kernoperator $\hat{T}$, wobei $B(|x'|)$ als Dual von $E/B(|x'|)^\circ$ aufgefaßt wird und $\hat{T}'$ mit der Einschränkung $T'|_{B(|x'|)}$ übereinstimmt. Nun ist $|x'|$ eine $\hat{T}'$-invariante schwache Ordnungseinheit in $B(|x'|)$, und es gilt weiterhin $F^s(\hat{T}')_+ = F(\hat{T}')_+$. Nach (3.10) kann deshalb $E/B(|x'|)^\circ$ als die ordnungsdirekte Summe aller

minimalen $\hat{T}$-Ideale $(\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in A}$ von $E/B(|x'|)^o$ geschrieben werden (hierbei wird ohne Einschränkung $(E/B(|x'|)^o)_s = \{0\}$ angenommen). Daher läßt sich $B(|x'|)$ zerlegen in die ordnungsdirekte Summe aller minimalen $\hat{T}'$-invarianten Bänder $(\hat{E}'_\alpha)_{\alpha\in A}$ von $B(|x'|)$. Mit den entsprechenden Überlegungen wie im Beweis zu (3.12) zusammen mit den Erläuterungen vor (1.9) folgt nun, daß $\mathcal{E}$ eine endliche Untergruppe $G(\mathcal{E}) \subset p\sigma(T')$ von Einheitswurzeln erzeugt.

Matrixoperatoren sind Kernoperatoren (Beispiel 1 und 2); deshalb wird die anschließende Folgerung aufgeführt, wobei der Fall $q = \infty$ aus der Bemerkung 2 zu (3.12) hervorgeht (Da jeder Matrixoperator auf l^∞ ordnungsstetig ist, existiert die Präadjungierte). Hierzu zeigt das Beispiel nach (3.13) wie wesentlich die Annahme '$F^s(T')_+ = F(T')_+$' ist.

3.13. Folgerung. Sei T ein positiver Matrixoperator auf l^q, $1 \le q \le \infty$, mit nicht-leerem peripheren Punktspektrum. Falls die Potenzen von T gleichmäßig beschränkt sind, enthält es für $1 \le q < \infty$ nur Einheitswurzeln. Erfüllt T die Bedingung '$F^s(T)_+ = F(T)_+$', so besteht es für $1 \le q \le \infty$ aus einer Vereinigung endlicher Gruppen von Einheitswurzeln.

Beispiel 5. Sei $l^\infty(\mathbb{Z})$ der Banachverband aller beschränkten Folgen auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Für den Schiftoperator auf $l^\infty(\mathbb{Z})$ liegt der Einheitskreis im Punktspektrum.

Der Schluß dieses Abschnittes zeigt, wie aus Bedingung (H) (im Beweis zu (3.10)) - nun formuliert in E bzw. E' - umgekehrt auch folgt, daß T ein Harris-Operator ist (vergleiche hierzu Horowitz [13], Theorem 3.4). Dies weist außerdem auf eine Beziehung zur Doeblin-Bedingung (D) (Seite 80-81) hin.

3.14. Satz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \leq T \in \mathscr{L}(E)$. Dann sind gleichwertig:

(a) T ist ein Harris-Operator.

(b) Es gibt $0 \prec x \in E$, $0 \prec y \leq x$, $0 \prec x' \in E'$, $n \in \mathbb{N}$ und $\delta \succ 0$, $\varepsilon \succ 0$ mit $0 \prec \delta \prec \langle x,x' \rangle$ so, daß aus $0 \leq z \leq x$ und $\langle z,x' \rangle \geq \delta$ die Ungleichung $T^n z \geq \varepsilon y$ folgt.

(b') Es gibt $0 \prec x \in E$, $0 \prec x' \in E'$, $0 \prec y' \leq x'$, $m \in \mathbb{N}$ und $\delta' \succ 0$, $\varepsilon' \succ 0$ mit $0 \prec \delta' \prec \langle x,x' \rangle$ so, daß aus $0 \leq z' \leq x'$ und $\langle x,z' \rangle \geq \delta'$ die Ungleichung $T'^m z' \geq \varepsilon' y'$ folgt.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Nach der Voraussetzung gibt es $0 \prec x \in E$, $0 \prec x' \in E'$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n \wedge x' \otimes x \succ 0$. Hierbei bedeuten die Annahmen $(T^n \wedge x' \otimes x)x \succ 0$ und $TE_x \subset E_x$ keine Einschränkung. Wie im Beweis zu (3.10) folgt nun (H) , wenn y für f gesetzt wird (die dort vorausgesetzte strikte Positivität von x' ist zur Herleitung von (H) nicht notwendig).

(b) $\Longrightarrow$ (a): x liegt in einem geeigneten Hauptideal in E , das nun als $C(K)$, K kompakt, aufgefaßt wird.

Dann entsprechen x und y stetigen Funktionen f und g auf K . Die Einschränkung $x'_{|C(K)}$ erklärt ein ordnungsstetiges, positives Radonmaß μ auf K und $T_{|C(K)}$ einen positiven Operator U auf C(K) .

Die Annahme, daß T^n senkrecht auf $(E' \otimes E)^{\perp\perp}$ steht, bedeutet insbesondere, daß $U^n \wedge \mu \otimes e = 0$ ist (e sei die Einsfunktion auf K). Nach (1.5.d) gilt daher $(U'^n \delta_t \wedge \mu) f = 0$ für alle t aus einer in K dichten Teilmenge $D \subset K$. Zu fest gewähltem $t \in D$ mit $g(t) \succ o$ gibt es wegen (1.1) ein $0 \leq h \leq f$, das $U'^n \delta_t(h) = U^n h(t) = o$ und $\mu(h) \geq \delta$ erfüllt. Dies widerspricht der Voraussetzung von (b).

Die Äquivalenz von (a) und (b') ergibt sich auf die gleiche Weise.

4. MITTELERGODISCHE UND GLEICHMÄSSIG MITTELERGODISCHE OPERATOREN

Das Konvergenzverhalten der Potenzen eines beschränkten Operators T auf einem Banachraum E wird in der Ergodentheorie untersucht. Ziel dieses Abschnittes ist es, aus der punktweisen Konvergenz der Cesàro-Mittel $M_n(T) = \frac{1}{n} \sum_{0 \le m \le n-1} T^m$, $n \in \mathbb{N}$, weitere und stärkere Konvergenzen herzuleiten, und zwar für spezielle positive Operatoren auf geeigneten Banachverbänden. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte geschieht dies zunächst für einen irreduziblen, positiven Harris-Operator T auf einem Banachverband mit ordnungsstetiger Norm (4.2). Anschließend wird - begründet durch eine Eigenschaft eines solchen Operators (3.7) - die Konvergenz der Cesàro-Mittel $(M_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ in der Operatornorm untersucht.

Zunächst einige bekannte Eigenschaften mittelergodischer Operatoren: Abweichend von der allgemeineren halbgruppentheoretischen Definition heißt hier ein Operator T auf einem Banachraum E mittelergodisch, wenn seine Cesàro-Mittel $(M_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie konvergieren. Der Limes P von $(M_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann eine stetige Projektion von E auf den Fixraum $F(T)$ mit Kern $P^{-1}(0) = \overline{(1_E - T)E}$. Außerdem gelten $\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} T^n = 0$ in der starken Operatortopologie und $TP = PT = P$.

Eine ausführlichere Diskussion von mittelergodischen Operatoren, allgemeiner von mittelergodischen Halbgruppen

enthält [25], [26] und auch [S], III.7,8 und V.8 .

Nützlich für Anwendungen ist die nun folgende äquivalente Charakterisierung eines mittelergodischen Operators. Sie ist unter der Voraussetzung gleichmäßig beschränkter Potenzen enthalten in 1.7 von [25] .

Es sei E ein Banachraum und T ein linearer Operator auf E mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} T^n = 0$ in der starken Operatortopologie und mit gleichmäßig beschränkten Cesàro-Mitteln $(M_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gelten die folgenden gleichwertigen Bedingungen des MITTELERGODENSATZES:

(a) T ist mittelergodisch.

(b) Für jedes x aus einer in E totalen Teilmenge besitzt $(M_n(T)x)_{n\in\mathbb{N}}$ einen schwachen Häufungspunkt.

(c) Der Fixraum $F(T)$ trennt die Punkte von $F(T')$.

Hierbei ist die Implikation (a) $\Longrightarrow$ (b) klar, und für (b) $\Longrightarrow$ (c) genügt die Bemerkung, daß jeder schwache Häufungspunkt von $(M_n(T)x)_{n\in\mathbb{N}}$ ein T-Fixpunkt ist. Zum Nachweis von (c) $\Longrightarrow$ (a) sei G der lineare, wegen der Gleichstetigkeit von $(M_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossene Teilraum $\{x \in E: \lim_{n\in\mathbb{N}} M_n(T)x \text{ existiert in } E\}$. Ein stetiges Funktional x' aus G° verschwindet insbesondere auf $F(T) + (1_E - T)E$. Also liegt x' in $F(T)^\circ \cap F(T')$. Die Voraussetzung in (c) zeigt $x' = 0$ und somit $G = E$.

Bemerkung. In [3], Theorem 2.1(v), zeigen Derriennic und Lin : Besitzt ein positiver Operator T auf einem AL-Raum E gleichmäßig beschränkte Cesàro-Mittel, so

folgt schon $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} T^n = 0$ in der Operatornorm. Weiter geben sie ein Beispiel eines positiven Operators T auf einem AL-Raum E an, dessen Cesàro-Mittel gleichmäßig beschränkt sind, obwohl $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| T^n \| = \infty$ gilt. (Bei einem ähnlichen Beispiel von Sato [32] ist T sogar mittelergodisch.)

Besonders einfach läßt sich die Bedingung (b) des Mittelergodensatzes im Fall eines Banachverbandes mit ordnungsstetiger Norm anwenden. Die schwache Kompaktheit aller Ordnungsintervalle charakterisiert gerade einen solchen Banachverband ([S],II.5.10). Daher gilt:

Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} T^n = 0$ in der starken Operatortopologie und gleichmäßig beschränkten Cesàro-Mitteln. Wenn T einen quasi-inneren Sub-Fixpunkt besitzt, dann ist T mittelergodisch.

(Vergleiche hierzu Theorem 2.2 in [25]).

Schließlich hat die mittelergodische Projektion P eines irreduziblen, positiven Operators T auf einem Banachverband E die Gestalt $P = x' \otimes x \gneq 0$, falls $F(T) \neq \{0\}$ gilt. Dabei ist $x \in E_+$ ein quasi-innerer T-Fixpunkt, $x' \in E'_+$ eine strikt positive, T'-invariante Linearform, und es gilt $\langle x, x' \rangle = 1$ ([25], Lemma 3.2).

Nach diesen Vorbereitungen folgt nun eine weitere Anwendung von (1.8). Es wird gezeigt, wann aus der Mittelergodizität schon die Konvergenz der Potenzen folgt.

4.1. Satz. Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm. Für einen positiven Operator T auf E sei $F(T) \neq \{0\}$, seine Potenzen seien alle irreduzibel und gleichmäßig beschränkt, aber nicht zueinander orthogonal. Dann konvergieren die Potenzen von T in der starken Operatortopologie gegen die mittelergodische Projektion P.

Beweis. Da T die Wachstumsbedingung (G) erfüllt und irreduzibel ist, gibt es wegen $F(T) \neq \{0\}$ einen quasi-inneren T-Fixpunkt $x \in E$, und es gilt $F^s(T)_+ = F(T)_+$ (Seite 6-7). Damit sind die Voraussetzungen von (1.8) gegeben. Insbesondere sind nach den vorangehehenden Erläuterungen alle T^k mittelergodisch mit der gleichen zugehörigen Projektion P für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Nicht-Orthogonalität der Potenzen von T führt dazu, daß für ein $m \in \mathbb{N}$ die Bedingung (b) von (1.8) zutrifft. Wegen der Ordnungsstetigkeit der Norm gilt somit $\lim_{n \in \mathbb{N}} |T^n(1_E - T^m)|y = 0$ für alle $y \in E_x$. Da x ein quasi-innerer Punkt in E ist, liefert ein Gleichstetigkeitsargument $\lim_{n \in \mathbb{N}} |T^n(1_E - T^m)| = 0$ in der starken Operatortopologie. Aus $P^{-1}(0) = \overline{(1_E - T^k)E}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und wiederum wegen der Gleichstetigkeit von $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt $\lim_{n \in \mathbb{N}} T^n y = 0$ für alle $y \in P^{-1}(0)$. Dies beweist die Aussage.

Dieser Satz wird nun angewendet auf einen irreduziblen, positiven Harris-Operator $T \in \mathcal{L}(E)$, E ein Banachverband

mit ordnungsstetiger Norm. Die Zyklengrenze eines solchen Operators ist nach (3.6) endlich. Alle Potenzen von $T^p|_{J_q}$, $1 \le q \le p$ und p die Zyklengrenze, sind irreduzibel (2.7). Für die $T^p|_{J_q}$ werden nun die Voraussetzungen von (4.1) nachgewiesen.

4.2. Satz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und T ein irreduzibler, positiver Harris-Operator mit gleichmäßig beschränkten Potenzen sowie $F(T) \neq \{0\}$. Dann ist T mittelergodisch, und die zugehörige Projektion P läßt sich schreiben in der Form $P = \frac{1}{p}\left(\sum_{1\le q\le p} x'_q\right) \otimes \left(\sum_{1\le q\le p} x_q\right)$, p die Zyklengrenze. Dabei gilt $0 \le x_q \in J_q$, $0 \le x'_q \in J'_q$, $1 \le q \le p$, sowie

(a) $\langle x_q, x_r \rangle = \delta_{q,r}$, $1 \le q,r \le p$ und

(b) $Tx_q = x_{q+1}$, $T'x'_{q+1} = x'_q$, $q \bmod p$.

Außerdem konvergiert $(T^{np})_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie gegen die Projektion $Q = \sum_{1\le q\le p} x'_q \otimes x_q$.

Beweis. Die Aussage, daß T endliche Zyklengrenze hat, steht in (3.6). Die Mittelergodizität von T zeigen die (4.1) vorangestellten Erläuterungen. Es gilt also $F(T)_+ \neq \{0\}$ und $F(T') \neq \{0\}$. Daher gibt es, wie in der Bemerkung vor (2.17) vorgeführt, $0 \le x_q \in J_q$ und $0 \le x'_q \in J'_q$, $1 \le q \le p$, mit den Eigenschaften (a) und (b).

Wegen (3.4) sind die Einschränkungen $T^p|_{J_q}$ von T^p auf J_q, $1 \le q \le p$, irreduzible, positive Harris-Operatoren. Die Potenzen eines jeden solchen $T^p|_{J_q}$ stehen daher nicht senkrecht aufeinander (3.5). Somit

sind für jedes $T^p_{|J_q}$ die Voraussetzungen von (4.1) erfüllt. Also konvergiert für jedes $1 \leq q \leq p$ $((T^p_{|J_q})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf J_q punktweise gegen $x'_q \otimes x_q$. Dies bedeutet aber, daß $(T^{pn})_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie gegen $\sum_{1\leq q\leq p} x'_q \otimes x_q$ konvergiert.

Aus Normierungsgründen schließlich besitzt P die im Satz angegebene Gestalt.

Bemerkungen. 1. Für den Sonderfall eines irreduziblen, positiven Kernoperators T auf einem Banachverband vom Typ $L^q(X,\mathfrak{A},\mu)$, $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $1 \leq q < \infty$ zeigte Moy in [23], Theorem 3.5(2), die Aussage von (4.2).

2. Wegen der Konvergenz von $(T^{pn})_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken, also auch in der schwachen Operatortopologie ist die von T erzeugte Halbgruppe $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere relativ kompakt in der schwachen Operatortopologie. Ist allgemeiner $T \in \mathcal{L}(E)$, E ein Banachraum, und $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ relativ schwachkompakt für alle $x \in E$, so enthält nach der Theorie relativ schwach-kompakter Halbgruppen der in der schwachen Operatortopologie in $\mathcal{L}(E)$ gebildete Abschluß $\overline{H}$ von $H := (T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein eindeutiges minimales Ideal K. Dieses ist eine kompakte Gruppe, und die Einheit Q von K ist die Projektion von E auf den von allen unimodularen Eigenvektoren erzeugten, abgeschlossenen linearen Teilraum G in E. Auf G wirkt $\overline{H}$ als kompakte Gruppe (sowohl in der starken als auch in der schwachen Operatortopologie). Im Gegensatz zu der Menge $QE := E_r$ aller 'T-reversiblen'

Vektoren heißen die Vektoren $x \in Q^{-1}(0)$ T-Fluchtvektoren. Für sie gilt: 0 liegt im schwachen Abschluß $\overline{Hx}$ von Hx (siehe hierzu [26], Seite 247, sowie [S], Seite 214-215, und die dort angegebenen Literaturhinweise).

Im Fall eines Banachverbandes E und eines positiven Operators T ist Q positiv und $T_{|E_r}$ ein Verbandsisomorphismus. Hierbei wird E_r mit der induzierten Ordnung versehen; mit einer geeigneten äquivalenten Norm wird E_r ein Banachverband. Für strikt positives Q ist E_r ein linearer Teilverband in E ([S], III.11.6).

In der Situation von (4.2) ist die Einheit des minimalen Ideals K die dort mit Q bezeichnete positive Projektion. Es gilt $E_r \cong \mathbb{C}^p$, und die Einschränkung von T auf den linearen Teilverband E_r ist periodisch mit einem einzigen Zyklus. Dieser besitzt die Länge p .

Es sei E ein Banachverband. Ein positiver Operator T auf E heißt stark mischend, wenn $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der schwachen Operatortopologie gegen $x' \otimes x$ konvergiert. Hierbei ist $x \in E$ ein T-invarianter, quasi-innerer Punkt in E und $x' \in E'$ eine strikt positive, T'-invariante Linearform auf E (siehe hierzu [26], 5) . Damit kann die anschließende Folgerung formuliert werden.

4.3. Folgerung. Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von (4.2) gilt:

Die Einschränkungen $T^p_{|J_q}$, $1 \leq q \leq p$, sind stark

mischend, wobei die zugehörigen mittelergodischen Projektionen die Form $P_q = x'_q \otimes x_q$ haben.

In (3.7) wurde gezeigt, daß ein irreduzibler, positiver Harris-Operator auf einem Banachverband E mit ordnungsstetiger Norm (irreduzible) Potenzen besitzt, die von Null verschiedene, kompakte, positive Kernoperatoren majorisieren. Dies ähnelt der Definition von quasi-kompakten Operatoren (Definition, siehe folgende Seite) und führt zu der Frage, was diese mit irreduziblen, positiven Harris-Operatoren zu tun haben. Um dies zu beantworten, wird zunächst der Zusammenhang zwischen gleichmäßig mittelergodischen und quasi-kompakten Operatoren beschrieben und dann auf Eigenschaften solcher Operatoren und ihre Beziehungen zu den Begriffen von Abschnitt 2 und 3 eingegangen.

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$, E ein Banachraum, heißt <u>gleichmäßig mittelergodisch</u>, wenn die Cesàro-Mittel $(M_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ in der Operatornorm konvergieren. Zunächst einige Eigenschaften eines solchen Operators T: es gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} T^n = 0$ in der Operatornorm, und außerdem sind gleichwertig:

(a) Die Resolvente $R(\lambda,T)$ besitzt in $\lambda = 1$ einen Pol der Ordnung 1.

(b) Die mittelergodische Projektion P (= Residuum von $R(\lambda,T)$ in $\lambda = 1$) ist von Null verschieden.

(c) 1 liegt im Spektrum $\sigma(T)$ von T.

(siehe hierzu Wolff [36],2.3 und 2.4). In jedem Fall ist daher E die topologische direkte Summe von $F(T)$ und $(1_E - T)E$.

Lin [18] zeigte:

Genau dann ist ein beschränkter Operator T auf einem Banachraum E gleichmäßig mittelergodisch, wenn $(1_E - T)E$ abgeschlossen ist und $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \|T^n\| = 0$ gilt.

Nach dem vorangehenden ist dies gleichwertig zu:

Die Resolvente von T besitzt in $\lambda = 1$ einen Pol der Ordnung ≤ 1, und es gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \|T^n\| = 0$.

Weiterhin heißt ein beschränkter Operator T auf einem Banachraum E quasi-kompakt, wenn es einen kompakten Operator $K \in \mathcal{L}(E)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|T^n - K\| < 1$. Gleichwertig hierzu ist die Existenz einer Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Operatoren auf E mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|T^n - K_n\| = 0$ ([29], Lemme V, 3.1). Insbesondere ist also mit T auch jede Potenz von T quasi-kompakt. Außerdem besitzt T nicht nur endlich-dimensionale Eigenräume zu unimodularen Eigenwerten, sondern es gilt auch der in Dunford-Schwartz ([4], VIII. 8.3) angeführte Satz:

Ein quasi-kompakter Operator T, für den $(\frac{1}{n} T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der schwachen Operatortopologie gegen Null konvergiert, ist immer schon gleichmäßig mittelergodisch mit endlich-dimensionalem Fixraum.

Ein solches T läßt, allein schon weil es quasi-kompakt ist und $r(T) \leq 1$ erfüllt ([4], VIII. 8.1), nur unimodulare Spektralwerte zu, die schon Pole der Resolvente sind ([4], VIII. 8.2). Deshalb müssen die Potenzen von T gleichmäßig beschränkt sein ([4], VII. 3). Außerdem gilt noch $F(T) = F(T^n)$. Die T^n sind für

jedes $n \in \mathbb{N}$ quasi-kompakt, folglich auch gleichmäßig mittelergodisch.

Nun wird ein positiver Operator T auf einem Banachverband E betrachtet, der gleichmäßig mittel-ergodisch ist. Für ihn kann auf die im vorangehenden Satz von Lin auftretende Bedingung ' $(\frac{1}{n} T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in der Operatornorm gegen Null' verzichtet werden. So zeigte Karlin ([16], Theorem 5 und 6):

Ein positiver Operator T auf einem Banachverband E ist genau dann gleichmäßig mittelergodisch, wenn $r(T) \leq 1$ gilt, 1 Pol der Resolvente $R(\lambda,T)$ ist und seine Ordnung höchstens 1 beträgt.

Ein weiterer Satz von Lin [20] kann nun wie folgt formuliert werden:

Sei T ein positiver Operator auf einem Banachverband E. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) T ist gleichmäßig mittelergodisch mit endlich-dimensionalem Fixraum.

(b) T ist quasi-kompakt, und $(\frac{1}{n} T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in der schwachen Operatortopologie gegen Null.

(c) Es gilt $r(T) \leq 1$, die Resolvente von T besitzt in 1 einen Pol von höchstens erster Ordnung, und der Fixraum ist endlich-dimensional.

Als nächstes werden die eben beschriebenen Operatoren zu den in Abschnitt 3 behandelten Harris-Operatoren in Beziehung gesetzt: die Adjungierte T' eines gleichmäßig mittelergodischen, positiven Operators T auf einem

AM-Raum E ist ein Harris-Operator, falls der Fixraum $F(T)$ endliche Dimension hat und nicht trivial ist (eine äquivalente Charakterisierung eines solchen, zusätzlich folgen-ordnungsstetigen Operators T auf einem abzählbar-ordnungsvollständigen AM-Raum E mit Einheit enthält (4.9)). Für die mittelergodische Projektion P gilt nämlich $0 < P' \in E \otimes E'$. Da auf $\mathcal{L}(E')$ die reguläre Norm mit der Operatornorm zusammenfällt, also $(M_n(T') \wedge P')_{n\in\mathbb{N}}$ in der Operatornorm gegen P' konvergiert ([S], IV.1.5), muß für ein $n\in\mathbb{N}$ die Beziehung $T'^n \wedge P' > 0$ zutreffen. Mit derselben Begründung wie eben ist sowohl für einen ordnungsvollständigen AM-Raum E mit Einheit als auch für einen AL-Raum E schon T ein Harris-Operator. Hierbei kann die Voraussetzung 'gleichmäßig mittelergodisch' nicht durch 'mittelergodisch' ersetzt werden, wie Beispiel 4 in Abschnitt 2 (Seite 34) zeigt, falls dort $E = L^1(K,\mu)$ und $T = T_{z_0}$, z_0 keine Einheitswurzel, gesetzt wird ((2.16), (3.5)).

Nun werden Beziehungen zwischen Abschnitt 2 und gleichmäßig mittelergodischen, positiven Operatoren mit endlichdimensionalen Fixraum beschrieben.

Zunächst ist zu bemerken, daß sich auf einen quasi-kompakten Operator $T\in\mathcal{L}(E)$ mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} T^n = 0$ in $\mathcal{L}_s(E)$, E ein Banachraum, die in der Bemerkung 2 zu (4.2) angedeutete Theorie relativ schwach-kompakter Operatorhalbgruppen anwenden läßt. Die hierbei auftretenden Aussagen über den Raum E_r aller T-reversiblen Vektoren lassen sich erweitern, falls zusätzlich E ein Banachverband und T positiv

ist sowie $r(T) = 1$ gilt. Dann besteht das unimodulare Spektrum von T aus einer endlichen Vereinigung von Gruppen von Einheitswurzeln ([21], Satz 4.12). Nach den Bemerkungen von Seite 73 sind sie Pole (erster Ordnung) der Resolvente $R(\lambda,T)$, also Eigenwerte von T. Es bezeichne k das kleinste gemeinsame Vielfache der Gruppenordnungen. Dann konvergiert $(T^{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ in der Operatornorm gegen die mittelergodische, positive Projektion Q von T^k ([4], VII. 3). Sie projiziert zugleich E auf E_r und läßt sich darstellen als $Q = \sum_{1\le i\le d} y_i' \otimes y_i$, wobei $d = \dim F(T^k)$ ist und $(y_i)_{1\le i\le d} \subset F(T^k)$ und $(y_i')_{1\le i\le d} \subset F(T'^k)$ sowie $\langle y_i, y_j' \rangle = \delta_{i,j}$, $1 \le i, j \le d$, gelten.

Wenn nun $F(T^k)$ (bzw. $F(T'^k)$) lineare Teilverbände in E bzw. in E' sind, können die y_i (bzw. y_i') jeweils paarweise orthogonal und positiv gewählt werden ([S], II.3.9). Damit sind insbesondere die y_i' (bzw. die y_i) positiv.

Der Aufbau von Q läßt sich noch genauer beschreiben, falls $F^s(T)_+ = F(T)_+$ oder $F^s(T')_+ = F(T')_+$ gilt. Hierzu sei zunächst T irreduzibel. Nach der Voraussetzung besitzt die Resolvente $R(\lambda,T)$ in $\lambda = 1$ einen Pol (erster Ordnung). Deshalb existiert die Zyklengrenze $p \in \mathbb{N}$ (2.17.c), und es gibt einen quasi-inneren T-Fixpunkt x in E. Da das unimodulare Spektrum von T nur aus Eigenwerten (= Polen der Resolvente $R(\lambda,T)$) besteht und diese nach (2.19) eine zyklisch erzeugte Gruppe der Ordnung p bil-

den, konvergiert $(T^{np})_{n\in\mathbb{N}}$ in der Operatornorm gegen Q. Wie in (4.2) (und auch mit den dortigen Bezeichnungen) läßt sich Q schreiben als $Q = \sum_{1\le q\le p} x_q'\otimes x_q$ und die mittelergodische Projektion P als $P = \frac{1}{p}\left(\sum_{1\le q\le p} x_q'\right)\otimes x$, $x = \sum_{1\le q\le p} x_q$.

Sei nun $\dim F(T) = m \ge 1$, und es gelte $F^s(T)_+ = F(T)_+$. Dann gibt es eine orthogonale Basis $(x_l)_{1\le l\le m}\subset E_+$ von $F(T)$ ([S], II.3.9). Bezeichnet I_l das von x_l erzeugte, abgeschlossene Ideal in E, $1 \le l \le m$, so sind die Einschränkungen $T_{|I_l}$ irreduzibel ([25], 3.2). Mit p_l als Zyklengrenze von $T_{|I_l}$ läßt sich deshalb auf $T_{|I_l}$ die vorangehende Aussage anwenden. Wegen $F^s(T)_+ = F(T)_+$ liegen die unimodularen Eigenvektoren im T-Ideal $I = \bigoplus_{1\le l\le m} I_l$. Jede Ordnung derjenigen Gruppen von Einheitswurzeln, die das unimodulare Spektrum bilden, tritt deshalb als ein p_l auf. Somit kann Q wie folgt dargestellt werden:

$$Q = \sum_{1\le l\le m}\ \sum_{1\le q\le p_l} x_q^{(l)\prime}\otimes x_q^{(l)} .$$

Für jedes $1 \le l \le m$ bildet hierbei $(x_q^{(l)})_{1\le q\le p_l}$ eine orthogonale, positive Zerlegung von x_l mit $Tx_q^{(l)} = x_{q+1}^{(l)}$, $q \bmod p_l$. Weiter sind die $x_q^{(l)\prime}$ positiv, und es gilt $T'x_{q+1}^{(l)\prime} = x_q^{(l)\prime}$, $q \bmod p_l$, $1 \le l \le m$, und

$$\langle x_q^{(i)}, x_r^{(j)}\rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j,\ q = r \bmod p_i \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die mittelergodische Projektion P von T läßt sich somit schreiben als $P = \sum_{1\le l\le m} \frac{1}{p_l}\left(\sum_{1\le q\le p_l} x_q^{(l)\prime}\right)\otimes x_l$.

Außerdem ist die Einschränkung von T auf $QE = F(T^k)$

ein periodischer Verbandsisomorphismus mit m Zyklen der Länge p_l, und es gilt $\dim F(T^k) = d = \sum_{1 \le l \le m} p_l$.

Eine weitergehende Erörterung hierzu enthält die Arbeit [34] von Schaefer. Sie geht insbesondere darauf ein, unter welchen Bedingungen QE und $Q'E'$ in kanonischer Dualität stehen: das heißt, daß Q eine Darstellung besitzt, in der auch die $x_q^{(1)}$, paarweise zueinander orthogonal sind und zusammen mit den $x_q^{(1)}$ Norm 1 haben. Die Einschränkung von T auf QE bzw. von T' auf $Q'E'$ wirkt dann als positive Isometrie ([34], Theorem 2).

Wird die Bedingung $F^s(T)_+ = F(T)_+$ im vorletzten Absatz durch die Forderung $F^s(T')_+ = F(T')_+$ ersetzt, so gibt es eine orthogonale, positive Basis $(x'_l)_{1 \le l \le m}$ von $F(T')$. Wie dort kann Q auf die bereits angegebene Gestalt gebracht werden, wobei nun $(x_q^{(1),})_{1 \le q \le p_l}$ eine orthogonale, positive Zerlegung von x'_l, $1 \le l \le m$, ist.

Dies entspricht den Darstellungen und Eigenschaften von P und Q bei Neveu ([29], Théorème Ergodique, Seite 163) (Die nun folgenden Erläuterungen hierzu liefern auch gleichzeitig den Hintergrund von (4.9)). Neveu geht aus von einer Übergangswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}$ auf einem Meßraum $(X,\mathcal{A})$. Auf dem abzählbar-ordnungsvollständigen Banachverband $B(X,\mathcal{A})$ aller reellen, $\mathcal{A}$-meßbaren, beschränkten Funktionen auf X erklärt $\mathcal{P}$ dann durch $T_{\mathcal{P}} f(t) = \int_X f(s)\mathcal{P}(t,ds)$, $f \in B(X,\mathcal{A})$, $t \in X$, einen folgen-ordnungsstetigen, positiven Operator $T_{\mathcal{P}}$, der die konstante Funktion $\mathbb{1}$ auf X invariant läßt. $T_{\mathcal{P}}$ ist also ein

Markoff-Operator, und es gilt daher $F^s(T_{\mathcal{P}}')_+ = F(T_{\mathcal{P}}')_+$.

Die Adjungierte $T_{\mathcal{P}}'$ kann aufgefaßt werden als positiver Operator auf dem Banachverband aller beschränkten, reellwertigen, endlich-additiven Mengenfunktionen $ba(X,\mathcal{A})$ auf $(X,\mathcal{A})$ ([S], II.4 Example 2). Für jedes $\mu \in ba(X,\mathcal{A})$ gilt $T_{\mathcal{P}}'\mu(A) = \int \mathcal{P}(t,A)d\mu(t)$, $A \in \mathcal{A}$. Wegen der Folgen-Ordnungsstetigkeit von $T_{\mathcal{P}}$ läßt $T_{\mathcal{P}}'$ das Band $ca(X,\mathcal{A})$ in $ba(X,\mathcal{A})$ fest. Hierbei bezeichnet $ca(X,\mathcal{A})$ die Menge aller beschränkten, reellwertigen, abzählbar-additiven Mengenfunktionen auf $(X,\mathcal{A})$, das heißt, die endlichen Maße auf $(X,\mathcal{A})$ (= folgen-ordnungsstetige Linearformen auf $B(X,\mathcal{A})$).

Von $T_{\mathcal{P}}$ wird nun die Quasi-Kompaktheit verlangt. Wie Neveu zeigt, sind die $x_q^{(1)}$, in der Darstellung von Q sogar Maße auf $(X,\mathcal{A})$ (siehe hierzu auch (4.9)) mit Norm 1 . Sie bilden daher einen endlich-dimensionalen Simplex mit paarweise zueinander orthogonalen Ecken, sind also die Extremalpunkte der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße in $F(T_{\mathcal{P}}'^k)$. Auf $F(T_{\mathcal{P}}'^k)$ wirkt deshalb $T_{\mathcal{P}}'$ als eine (positive) Isometrie.

Für quasi-kompaktes $T_{\mathcal{P}}'|ca(X,\mathcal{A})$ zeigten Kakutani und Yosida in [15] mit spektral-theoretischen Methoden das zu Neveu's Aussagen duale Ergebnis für $M := ca(X,\mathcal{A})$. Hierbei konstruierten sie sogenannte ergodische Kerne $A_1 \in \mathcal{A}$, $1 \le l \le m$. Diese Kerne sind paarweise zueinander disjunkt und Träger der x_l' , wobei auch $\mathcal{P}(t,A_l) = 1$ für $t \in A_l$ gilt. Dies entspricht der Irreduzibilität der Einschränkun-

gen $T_{\mathcal{P}}'|_{\overline{M_{x_1'}}}$, $1 \le l \le m$. Weiter läßt sich jeder ergodische Kern A_1 disjunkt zerlegen in sogenannte sub-ergodische Kerne $A_{1,q} \in \mathcal{A}$, $1 \le q \le p_1$. Dabei sind die $A_{1,q}$ Träger der $x_q^{(1)'}$, und es gilt $\mathcal{P}(t, A_{1,q+1}) = 1$ für $t \in A_{1,q}$, $q \bmod p_1$. Das spiegelt wieder, daß $T_{\mathcal{P}}'$ die $(\overline{M_{x_q^{(1)'}}})_{1 \le q \le p_1}$ zyklisch permutiert.

Die Ansätze von Neveu bzw. Kakutani und Yosida sind gleichwertig, denn aus der Quasi-Kompaktheit von $T_{\mathcal{P}}$ folgt die Quasi-Kompaktheit der Einschränkung $T_{\mathcal{P}}'|_{ca(X,\mathcal{A})}$. Auch die Umkehrung trifft zu. Mit $S := T_{\mathcal{P}}'|_{ca(X,\mathcal{A})}$ ist nämlich auch S' gleichmäßig mittelergodisch, und außerdem gilt $\dim F(S') < \infty$. Diese Eigenschaften besitzt dann auch die Einschränkung $S'|_{B(X,\mathcal{A})}$, die mit $T_{\mathcal{P}}$ übereinstimmt und folglich quasi-kompakt ist (Seite 74).

Eine zur Quasi-Kompaktheit von $T_{\mathcal{P}}$ äquivalente, wahrscheinlichkeitstheoretische Bedingung ist die sogenannte Doeblin-Bedingung (D).

(D) Es gibt $0 < \delta$, $0 < \varepsilon < 1$, $n \in \mathbb{N}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(X,\mathcal{A})$ so, daß für $A \in \mathcal{A}$ aus $\mu(A) \le \delta$ immer $T_{\mathcal{P}}^{n} \chi_A \le \varepsilon \mathbb{1}$ folgt.

Weiter sind in der Literatur die folgenden (zu (D) gleichwertigen) Bedingungen (D_0) und (D_1) zu finden:

(D_0) Es gibt $0 < \delta$, $0 < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(X,\mathcal{A})$ so, daß für $A \in \mathcal{A}$ aus $\mu(A) \le \delta$ immer $T_{\mathcal{P}}^{n} \chi_A \le (1-\varepsilon)\mathbb{1}$ folgt (Hierbei kann $\delta = \varepsilon$ gewählt werden.).

(D_1) Es gibt $0 < \delta < 1$, $0 < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$ und ein Wahr-

scheinlichkeitsmaß μ auf (X,α) so, daß für $A \in \alpha$ aus $\mu(A) \geq \delta$ immer $T_{\mathcal{P}}^{n} \chi_A \geq \varepsilon \mathbb{1}$ folgt.

Die Äquivalenz von (D_1) und der Quasi-Kompaktheit von $T_{\mathcal{P}}$ steht bei Neveu ([29], V.3.2 Exercise).

Unter der Voraussetzung (D) weist Jacobs ([14], Satz 2.4.1) nach, daß $T_{\mathcal{P}}' \mid ca(X,\alpha)$ quasi-kompakt ist. Einen ausführlicheren Beweis hierzu unter der Bedingung (D_o) liefert Fortet [10]. Das verdeutlicht ein weiteres Mal (vergleiche Seite 74) den Zusammenhang mit den Harris-Operatoren: für den von Fortet konstruierten, zum Nachweis der Quasi-Kompaktheit von $T_{\mathcal{P}}' \mid ca(X,\alpha)$ benötigten kompakten Operator $K \in \mathcal{L}(ca(X,\alpha))$ gilt sowohl $\| T_{\mathcal{P}}'^{n} - K \| < 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ als auch $0 \leq K \leq T_{\mathcal{P}}'^{n} \mid_{ca(X,\alpha)}$. Die Konstruktion von K wie auch Beispiel 3 in Abschnitt 3 (Seite 45) zeigen, daß K ein Kernoperator ist und somit $T_{\mathcal{P}}' \mid ca(X,\alpha)$ und auch $T_{\mathcal{P}}'$ Harris-Operatoren sind.

Außerdem weist ein Vergleich der Bedingungen (H) bzw. (H') aus (3.14) mit (D_1) auf den Zusammenhang der Doeblin-Bedingung mit Harris-Operatoren hin (siehe hierzu [24], Corollary 4).

Eine Literaturzusammenstellung über die anfängliche Entwicklung der Doeblin-Bedingung und des Begriffes 'Quasi-kompakt' steht bei Jacobs ([14], Seite 44/45). Weiter betrachtet er den Fall einer abelschen Operator-Halbgruppe auf $ca(X,\alpha)$, die einen quasi-kompakten Operator enthält und außerdem von Übergangswahrscheinlichkeiten induziert wird ([14], II.3, siehe auch Eberlein, [5], 6).

Der Schluß dieses Abschnittes behandelt unter anderem in allgemeinerem Rahmen die Äquivalenz der Doeblin-Bedingung (D) mit der Quasi-Kompaktheit von $T_{\mathcal{P}}$ (4.9 (a)$\Leftrightarrow$(d)).

Zunächst wird eine verallgemeinerte Doeblin-Bedingung (D_a) angegeben (4.4). Dabei geht ein, daß ein gleichmäßig mittelergodischer, positiver Operator mit endlich-dimensionalem Fixraum gleichmäßig beschränkte Potenzen besitzt (Seite 73-74). Es folgen in (4.5) Bedingungen dafür, daß ein Harris-Operator gleichmäßig mittelergodisch ist (vergleiche Seite 72).

4.4. Hilfssatz. Es sei E ein Banachverband und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ gleichmäßig mittelergodisch mit $\dim F(T) < \infty$. Dann genügt T einer allgemeinen Doeblin-Bedingung (D_a), das heißt, es gibt $m \in \mathbb{N}$, $0 < \delta$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < x' \in E'$ mit $\|x'\| = 1$ so, daß aus $\|x\| \leq 1$, $\langle |x|, x' \rangle \leq \delta$ und $n \geq m$ immer $\|T^n x\| \leq \varepsilon$ folgt.

Beweis. Ohne Einschränkung kann $r(T) = 1$, also $F(T) \neq \{0\}$ angenommen werden. Dann gibt es nach der Voraussetzung ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \in \mathbb{N}} \| T^{kn} - \sum_{1 \leq i \leq d} y_i' \otimes y_i \| = 0$, wobei $0 < Q = \sum_{1 \leq i \leq d} y_i' \otimes y_i$ die mittelergodische Projektion zu T^k ist (Seite 76). Zu jedem $\gamma > 0$ existiert daher ein $m = kn$ so, daß $\|T^m x\| \leq \| \sum_{1 \leq i \leq d} \langle |x|, y_i' \rangle y_i \| + \gamma$ ist für alle $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$. Es gilt also

$\|T^m x\| \leq \langle |x|, x' \rangle \eta + \gamma$ für $x' = \frac{1}{\theta} \sum_{1 \leq i \leq d} |y_i'|$,

$\theta = \| \sum_{1 \leq i \leq d} |y_i'| \|$, $\eta = \theta \| \sum_{1 \leq i \leq d} |y_i| \|$ und $\|x\| \leq 1$.

Wird nun $\gamma = \frac{1}{3 \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|}$, $\delta = \frac{1}{3 \eta \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|}$ und $\varepsilon = \frac{2}{3}$

gesetzt, so folgt (D_a) .

Bemerkung. Bei positiven y_i' (dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn $F(T')$ ein linearer Teilverband in E' ist) kann x' als $\frac{1}{\theta} \sum_{1 \le i \le d} y_i'$ gewählt werden. Insbesondere ist also x' ein T'^k- und dann auch ein T'^m-Fixpunkt.

Zum Beweis des anschließenden Satzes ist im Zusammenhang mit der Wachstumsbedingung (G) die folgende Vorbemerkung nützlich: Sei E ein Banachverband und $0 \le T \in \mathcal{L}(E)$ mit $r(T) = 1$. Genügt T der Wachstumsbedingung, dann gibt es zu jedem $x' \in F^s(T')_+$ ein $y' \in F_s(T')_+$ so, daß $x' + y'$ in $F(T')_+$ liegt (insbesondere folgt dann aus $F_s(T')_+ = F(T')_+$ immer $F^s(T')_+ = F(T')_+$). Für einen $\sigma(E',E)$-Häufungspunkt z' von $((\lambda-1)R(\lambda,T')x')_{\lambda>1}$ gilt nämlich $T'z' = z' \ge x'$. Mit $y' = z' - x'$ folgt die Aussage.

Weiter wird daran erinnert (Seite 5), daß die Bedingung $F^s(T^n)_+ = F(T^n)_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, falls sie für $n = 1$ erfüllt ist. Auf jeden irreduziblen, positiven Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ mit beschränkten Cesàro-Mitteln und $r(T) = 1$ trifft dies zu (Seite 6-7).

4.5. Satz. Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $0 \le T \in \mathcal{L}(E)$ ein irreduzibler Harris-Operator. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) T ist gleichmäßig mittelergodisch.

(b) T ist mittelergodisch. Außerdem genügt T einer allgemeinen Doeblin-Bedingung (D_a) , und es gilt $F(T) = F(T'')$.

Beweis. Wegen (4.4) muß nur die Implikation (b) $\Longrightarrow$(a) gezeigt werden, wobei $r(T) = 1$ keine einschränkende Annahme ist. Nach der Voraussetzung in (b) genügt T einer allgemeinen Doeblin-Bedingung (D_a). Die dabei auftretende natürliche Zahl m wird hier mit n_o bezeichnet. Zu einem geeigneten $m \geq n_o$ gibt es nach (3.7) einen kompakten, positiven Operator $0 \prec C_m =: C \leq T^m$; außerdem ist T^m irreduzibel. Es genügt nun, für $Q := T^m - C$ die Ungleichung $r(Q) < 1$ nachzuweisen. T ist dann quasi-kompakt, also gleichmäßig mittelergodisch (Satz von Dunford-Schwartz, Seite 73).

Angenommen, es sei $r(Q) = 1$. Dann existiert in E eine auf 1 normierte, positive Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|x_n - Qx_n\| = 0$. Jeder $\sigma(E'',E')$-Häufungspunkt x'' von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also $0 \leq x'' = Q''x'' \leq T''^m x''$. Da E ein Ideal in E'' ist ([S], II.5.10(e)) und außerdem $F(T'') = F(T)$ sowie (G) gelten, liegt x'' nach der Vorbemerkung in E . Insbesondere ist x'' ein T^m-Fixpunkt. Deshalb muß $x'' = 0$ sein. Andernfalls wäre x'' wegen der Irreduzibilität von T^m ein quasi-innerer Punkt in E . Dies widerspräche $0 \prec C$ $(\leq T^m)$. Somit konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen Null. Aus der Kompaktheit von C folgt daher $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|Cx_n\| = 0$. Die Ungleichung $\|x_n - T^m x_n\| \leq \|Cx_n\| + \|x_n - Qx_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, liefert dann $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|x_n - T^m x_n\| = 0$. Dies widerspricht (D_a) .

Bemerkung. 1. Ein reflexiver Banachverband E besitzt ordnungsstetige Norm, und für $T \in \mathcal{L}(E)$ gilt $F(T) = F(T'')$.

2. Wie der Beweis von (b) $\Longrightarrow$ (a) zeigt, genügt es, die Mittelergodizität von T durch die Wachstumsbedingung (G) und $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} T^n = 0$ in $\mathscr{L}_\sigma(E)$ zu ersetzen.

Für einen AL-Raum können in (4.5) die Voraussetzung und die zu (a) äquivalente Bedingung (b) vereinfacht werden (siehe Bemerkung 1 zu 4.6). Dies ist der Inhalt des nun folgenden Satzes (und seiner Verallgemeinerung (4.7)). Er umfaßt die wichtigste Äquivalenz des Theorems 4.1 in [13] von Horowitz. Zwar benutzt der Beweis wie bei Horowitz (3.7), weicht aber ansonsten wesentlich ab.

4.6. Satz. Sei E ein AL-Raum und $0 \leq T \in \mathscr{L}(E)$ irreduzibel. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) T ist gleichmäßig mittelergodisch.

(b) T' ist mittelergodisch.

Beweis. Nur die Implikation (b) $\Longrightarrow$ (a) ist nachzuweisen, wobei ohne Einschränkung $r(T) = 1$ angenommen werden kann.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Wegen der Irreduzibilität von T besitzt E eine schwache Ordnungseinheit. Für einen kompakten Raum K und ein strikt positives Radonmaß μ auf K kann E daher als $L^1(K,\mu)$ und E' als $C(K)$ aufgefaßt werden ([S], II.8.5) . Nach einem Theorem von Grothendieck ([S], II.10.4) folgt aus (b), daß $(M_n(T''))_{n\in\mathbb{N}}$ in der Topologie $\sigma(E'',E''')$ konvergiert. Der Mittelergodensatz (Seite 66) zusammen mit der dortigen Bemerkung

zeigt nun die Mittelergodizität von T''. Dies bedeutet insbesondere, daß T mittelergodisch ist. Wegen der Irreduzibilität von T liegt daher schon jeder T''-Fixpunkt in E. Da $r(T) = 1$ ist, liefert ein Satz von Krein-Rutman ([33], 2.6 Corollary) einen von Null verschiedenen T''-Fixpunkt. Deshalb kann die mittelergodische Projektion P von T nicht Null sein.

Angenommen, es sei T kein Harris-Operator. Somit ist $T'^n \wedge \mu \otimes e = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ([S], V.Exercise 2d). Nach (1.5.d) gibt es dann eine in K dichte Teilmenge $D \subset K$ so, daß für jedes $t \in D$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ $T''^n \delta_t \wedge \mu = 0$ ist. Also liegt $(T''^n \delta_t)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $t \in D$ in $E^\perp$, wobei E als Band in E'' betrachtet wird. Wegen $F(T'') = F(T)$ gilt deshalb für jedes $t \in D$ $\lim_{n \in \mathbb{N}} M_n(T'')\delta_t = P''\delta_t = 0$. Da D dicht in K liegt, folgt $P = 0$ im Widerspruch zu $P \neq 0$, das heißt, T ist ein Harris-Operator.

Folglich gibt es nach (3.7) ein $m \in \mathbb{N}$ und einen kompakten Operator $0 \lneq C \leq T^m$ so, daß T^m irreduzibel ist. Die Annahme, es sei $r(Q) = 1$ für $Q = T^m - C$ führt wie im Beweis zu (4.5) zu einer positiven, schwach gegen Null konvergenten und auf 1 normierten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$. In dem AL-Raum E liefert dies $\lim_{n \in \mathbb{N}} \| x_n \| = 0$ im Widerspruch zu $\| x_n \| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ (auch mit dem eben erwähnten Satz von Krein-Rutman läßt sich aus $r(Q) = 1$ ein Widerspruch folgern). T ist also quasi-kompakt und daher gleichmäßig mittelergodisch.

Bemerkungen. 1. Sei E ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(E)$. Wenn T mittelergodisch ist (bzw. - allgemeiner - gleichmäßig beschränkte Cesàro-Mittel $(M_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt) und $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \| T^n \| = 0$ gilt, dann folgt aus der Bedingung $F(T) = F(T'')$ die Mittelergodizität von T' (bzw. die Mittelergodizität von T und T'). Dies ergibt sich aus dem Mittelergodensatz (Seite 66). Treffen diese drei Voraussetzungen gleichzeitig zu, so folgt im allgemeinen auch dann noch nicht, daß T selbst gleichmäßig mittelergodisch ist. Auch für einen irreduziblen, positiven Operator T auf einem Banachverband E mit ordnungsstetiger Norm ist dies nicht erfüllt. Das zeigen etwa der Operator $T_\varphi \in \mathscr{L}(L^2(X,\alpha,\mu))$ aus Beispiel 3 in Abschnitt 1 und der Operator $T_{z_o} \in \mathscr{L}(L^2(K,\mu))$, z_o keine Einheitswurzel, aus Beispiel 4 Abschnitt 2.

2. Im allgemeinen ist ein irreduzibler, positiver Operator $T \in \mathscr{L}(E)$ mit mittelergodischer Adjungierter T' selbst nicht mittelergodisch. Dies trifft sogar dann zu, wenn E ordnungsstetige Norm besitzt und T zusätzlich ein Kernoperator ist, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:

Beispiel. Sei $E = c_o$ und A der durch

$$a_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{m+1} & \text{für } 1 \le n \le m+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärte kontraktive, positive Matrixoperator auf E. Es gilt $F(A) = \{0\}$. Hingegen läßt A' den strikt positiven Vektor $x' \in E'_+$ mit den Komponenten $x'_n = \frac{1}{(n-1)!}$, $n \in \mathbb{N}$, invariant. Deshalb ist T' mittelergodisch (Seite 67).

Es liegt nun nahe, zu fragen, ob die Irreduzibilität von T in (4.6) ersetzt werden kann durch die schwächere Bedingung: $\dim F(T) < \infty$. Die Antwort hierauf gibt der folgende Satz. Gleichzeitig wird dabei eine von Lin ohne Beweis angeführte Aussage ([19], Remark 1 zu Theorem 2) verallgemeinert.

4.7. Satz. Sei E ein AL-Raum und $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) T ist gleichmäßig mittelergodisch mit endlich-dimensionalem Fixraum $F(T)$.

(b) T' ist mittelergodisch mit endlich-dimensionalem Fixraum $F(T')$.

(c) Die Cesàro-Mittel $(M_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ sind gleichmäßig beschränkt, und es gilt $F(T) = F(T'')$.

Beweis. Die Übersicht über gleichmäßig mittelergodische Operatoren enthält '(a) $\Longrightarrow$ (c)'.

(c) $\Longrightarrow$ (b): Aus dem Mittelergodensatz (Seite 66) und der dortigen Bemerkung folgt, daß T und T' mittelergodisch sind. Die mittelergodische Projektion P von T ist wegen $P''E'' = F(T'') = F(T)$ schwach-kompakt, also kompakt, da E die Dunford-Pettis Eigenschaft besitzt ([S], II.9.9, II.9.9 Corollary 1). Dies beweist , daß $\dim F(T') < \infty$ gilt.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Zunächst ist E' als Dual eines AL-Raumes ein AM-Raum mit Einheit ([S], II.9.1) und somit isomorph zu einem (ordnungsvollständigen) $C(K)$, K kompakt ([S],

II.7.4). Wie im Beweis von (4.6) folgt nun, daß T'' und damit auch T mittelergodisch ist. Deshalb liegt jeder T''-Fixpunkt in E, da außerdem $F(T)$ endliche Dimension besitzt.

Ohne Einschränkung kann $r(T) = 1$ vorausgesetzt werden. Nach dem in der Übersicht über gleichmäßig mittelergodische Operatoren angeführten Satz von Karlin (Seite 74) muß zum Beweis von (a) nachgewiesen werden, daß 1 ein Pol der Resolvente von T ist.

Sei P also die mittelergodische Projektion von T und N das T-Ideal $\{ x \in E: P|x| = 0 \}$. Die Einschränkung $T_{|N}$ ist ebenfalls mittelergodisch und wegen $F(T'') = F(T) = P''E''$ gilt $F((T_{|N})'') = F(T_{|N}) = \{0\}$. Das führt aber zu $r(T_{|N}) < 1$: N' ist nämlich ein AM-Raum mit Einheit ([S], II.9.1). Für $r(T_{|N}) = 1$ würde also nach dem schon verwendeten Satz von Krein-Rutman ein von Null verschiedener $(T_{|N})''$-Fixpunkt existieren.

Nach [S], V.5.3 genügt es daher, P als strikt positiv vorauszusetzen. Wie im Beweis zu Theorem V.5.5 in [S] kann deshalb für ein $n \in \mathbb{N}$ der Fixraum $F(T)$ mit $\mathbb{C}^n$ identifiziert werden. Jedes Element e_m der kanonischen Basis von $\mathbb{C}^n$ erzeugt dann in E ein T-Ideal I_m. Die Einschränkungen von T auf diese I_m sind irreduzibel und genügen der Bedingung (b), also auch der Bedingung (a) von (4.6). Eine erneute Anwendung von [S], V.5.3 zeigt, daß die Resolvente der Einschränkung von T auf das T-Ideal $I = \sum_{1 \le m \le n} I_m$ ([S], III.1.2) einen Pol

erster Ordnung hat. Kann nun für den von T auf E/I kanonisch induzierten Operator T_I noch $r(T_I) < 1$ nachgewiesen werden, so folgt die Behauptung durch eine letzte Anwendung von [S], V.5.3 .

Angenommen, es sei $r(T_I) = 1$. E/I ist als Quotient nach einem abgeschlossenen Ideal ein Projektionsband in E , also insbesondere ein AL-Raum. Damit folgt wie zu Anfang dieses Beweisteiles die Existenz eines $(T_I)''$-Fixpunktes $0 < x'' \in (E/I)''$. Nun läßt sich $(E/I)''$ als ein Projektionsband in E'' auffassen. Dies bedeutet aber, daß $0 < x'' \leq T''x''$ gilt. Mit der Vorbemerkung zu (4.4), der Bedingung $F(T) = F(T'')$ und, da E ein Ideal in E'' ist, ergibt sich $0 < x'' \in E$, also $x'' \in I$. Dies widerspricht $0 < x'' \in E/I$.

(4.7) geht nun auch in den Beweis des bereits erwähnten Satzes (4.9) (Seite 78, 79, 82) ein. Dieser benötigt noch den folgenden Hilfssatz. Die für dessen Beweis entscheidende Idee, das (dort beschriebene) Hauptband $B(y)$ zu betrachten, teilte mir Heinrich P. Lotz mit.

4.8. Hilfssatz. Es sei E ein abzählbar-ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit e , $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ folgenordnungsstetig mit $r(T) \leq 1$ und $J \subset E$ ein T-invariantes σ-Ideal. Wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist, dann gilt $r(T_{|J}) < 1$.

(a) $F^s(T')_+ = F(T')_+$, und auf J verschwindet jede T'-invariante Linearform.

(b) T ist mittelergodisch mit $F(T_{|J}) = \{0\}$.

Beweis. Angenommen, es sei $r(T_{|J}) = 1$. Dann gibt es ein $0 < x \in J$ mit $\lim_{\lambda \downarrow 1} \|R(\lambda,T)x\| = \infty$ ([S], V.4.1). Für $\lambda > 1$ ist das von $y = R(\lambda,T)x$ erzeugte Hauptideal E_y T-invariant und enthält x . Wegen der Abgeschlossenheit von J ([S], II.5.2.(iv)) liegt E_y in J . Als abzählbar-ordnungsvollständiger linearer Verband besitzt E die Hauptbandeigenschaft ([S], II.2.11 Corollary 2). Somit liefert die Folgen-Ordnungsstetigkeit von T die T-Invarianz des von y in E erzeugten Hauptbandes $B(y)$. Weiter liegt $B(y)$ in J , weil J ein σ-Ideal ist. Da nach der Voraussetzung E eine Einheit enthält, ist außerdem das Band $B(y)$ isomorph zu einem AM-Raum mit Einheit. Wegen $x \in B(y)$ ist $r(U) = 1$ für $U := T_{|B(y)}$. Nach dem bereits benutzten Satz von Krein-Rutman existiert deshalb ein $0 < x' \in F(U')$.

Im Fall (a) ist x' wegen $F^a(T')_+ = F(T')_+$ auch ein T'-Fixpunkt. Dies widerspricht aber $F(T') \subset J^o$.

Gilt (b), so muß auch U mittelergodisch sein und nach dem Mittelergodensatz einen von Null verschiedenen Fixvektor besitzen. Dies widerspricht aber $F(T_{|J}) = \{0\}$.

4.9. Satz. Es sei E ein abzählbar-ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit e. Weiter sei T ein folgen-ordnungsstetiger, positiver Operator auf E, der gleichmäßig beschränkte Cesàro-Mittel $(M_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt und $F^s(T')_+ = F(T')_+$ erfüllt. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) T ist gleichmäßig mittelergodisch mit endlich-dimensionalem Fixraum $F(T)$.

(b) T ist mittelergodisch mit endlich-dimensionalem Fixraum $F(T)$.

(c) Jede T'-invariante Linearform ist folgen-ordnungsstetig.

(d) Es gibt $0 < \delta$, $0 < \varepsilon < 1$, $n\in\mathbb{N}$ sowie eine folgen-ordnungsstetige Linearform $0 < x' \in E'$ mit $\|x'\| = 1$ so, daß aus $0 \leq x \leq e$, $x \wedge e-x = 0$ und $\langle x,x'\rangle \leq \delta$ immer $T^n x \leq \varepsilon e$ folgt.

Beweis. Die Aussage '(a) $\Longrightarrow$ (b)' ist klar.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Nach dem Satz von Kakutani ([S], II.7.4) wird E aufgefaßt als ein $C(K)$, K kompakt und quasi-Stonesch. Sei nun $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ eine monoton gegen Null fallende Folge. Da die $M_n(T)$ folgen-ordnungsstetig sind, gilt $\inf_{k\in\mathbb{N}} M_n(T)g_k(t) = 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und jedes t aus einer in K dichten G_δ-Menge $D \subset K$ (Vorbemerkung zu Hilfssatz (1.3)).

Gemäß Theorem II.10.4 in [S] und dem Mittelergodensatz (Seite 66) konvergiert die Folge $(M_n(T')\delta_t)_{n\in\mathbb{N}}$ nach der Voraussetzung für jedes t aus K in der Norm gegen

$P'\delta_t$. Hierbei bezeichnet P die mittelergodische Projektion von T . Für jedes feste $t \in K$ und $\gamma > 0$ sowie genügend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt daher $|M_n(T)g_k(t) - Pg_k(t)| \leq \gamma$, also $0 \leq Pg_k(t) \leq \gamma + M_n(T)g_k(t)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, daß für jedes $t \in D$ $\inf_{k \in \mathbb{N}} Pg_k(t) = 0$ und folglich $\inf_{k \in \mathbb{N}} Pg_k = 0$ erfüllt ist.

Da wegen $F^s(T')_+ = F(T')_+$ der duale Fixraum $F(T')$ ein linearer Teilverband in E' ist und außerdem nach der Voraussetzung endliche Dimension besitzt, läßt sich P darstellen als $P = \sum_{1 \leq m \leq n} \mu_m \otimes f_m$ für $(\mu_m)_{1 \leq m \leq n} \subset F(T')_+$ und $(f_m)_{1 \leq m \leq n} \subset F(T)_+$. Aus $0 \leq \sum_{1 \leq m \leq n} (\inf_{k \in \mathbb{N}} \mu_m(g_k)) f_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} Pg_k$ ergibt sich somit die Folgen-Ordnungsstetigkeit der μ_m . Mit $P'E' = F(T')$ folgt daher (c).

(c) $\Longrightarrow$ (a): Zunächst wird $F(T')$ als endlich-dimensional nachgewiesen. Angenommen, die Dimension von $F(T')$ ist nicht endlich. Da $F(T')$ ein linearer Teilverband in E' ist, liegt in $F(T')_+ \setminus \{0\}$ eine Folge $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise zueinander orthogonaler Vektoren: es genügt hierfür, anzunehmen, daß es in $F(T')$ kein unendliches maximales Orthogonalsystem gibt. Dann enthält $F(T')$ eine schwache Ordnungseinheit x' , wobei nach der Annahme das von x' in $F(T')$ erzeugte Hauptideal $F(T')_{x'}$ keine endliche Dimension besitzt. Wird nun $F(T')_{x'}$ als ein $C(K_o)$, K_o kompakt, betrachtet, so kann eine unendliche Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K_o)_+ \setminus \{0\}$ mit paarweise zueinander disjunkten Trägern konstruiert werden. Diese Folge, nun auf-

gefaßt als Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $F(T')$, besitzt die gewünschten Eigenschaften.

Wegen der $\sigma(E',E)$-Abgeschlossenheit von $F(T')$ in E' und (1.3) (Lotz' Hilfssatz) widerspricht aber die Existenz einer solchen Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Voraussetzung von (c).

Sei nun $(x'_m)_{1\leq m\leq n}$ eine Basis von $F(T')$. Diese kann wegen $F^s(T')_+ = F(T')_+$ orthogonal und positiv gewählt werden. Für $x' := \sum_{1\leq m\leq n} x'_m$ bezeichne N das Null-Ideal $\{x\in E: \langle|x|,x'\rangle = 0\}$ von x'. Die Folgen-Ordnungsstetigkeit von x' besagt dann, daß N ein σ-Ideal, E/N also abzählbar-ordnungsvollständig ([S], II.Exercise 5.b) und als Quotient nach einem abgeschlossenen Ideal ein AM-Raum mit Einheit ist. Auf E/N induziert x' eine folgen-ordnungsstetige, strikt positive Linearform x'_N. Deshalb stimmen die folgen-ordnungssstetigen und die ordnungsstetigen Linearformen auf E/N überein, und E/N ist ordnungsvollständig ([S], II.4.9). Wegen der strikten Positivität der dann ordnungsstetigen Linearform x'_N besitzt E/N den AL-Raum G aller ordnungsstetigen Linearformen auf E/N als Banachverbands-Prädual ([S], II.9.3). Weiter zeigen die Beziehung $TN\subset N$ und die Folgen-Ordnungsstetigkeit der kanonischen Abbildung $q: E\longrightarrow E/N$, daß T auf E/N den positiven, folgen-ordnungsstetigen Operator T_N induziert. Seine Adjungierte läßt also G invariant. Somit existiert zu T_N die Präadjungierte $S\in\mathcal{L}(G)$.

Da S'' als Einschränkung von T' auf N^o aufgefaßt

werden kann, folgt $F(S) = F(S'')$ nach der Definition von x'. Außerdem sind die Cesàro-Mittel $(M_n(S))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt, weil dies nach der Voraussetzung schon für T zutrifft. (4.7) besagt dann, daß die Resolvente von T_N in 1 einen Pol der Ordnung ≤ 1 besitzt. Aus der Definition von x' und dem Mittelergodensatz folgt $F(T_{|N}) = \{0\}$, also gilt $r(T_{|N}) < 1$ nach (4.8.b). Lemma V.5.3 in [S] zeigt nun, daß die Resolvente von T in 1 einen Pol der Ordnung ≤ 1 hat. Damit ist (a) gezeigt (Seite73 ,74).

(a) $\Longrightarrow$ (d): Seien ε, δ, n und x' wie in (4.4) angegeben. Kann nun noch x' folgen-ordnungsstetig gewählt werden, so gilt (d).

Zunächst läßt sich x' nach der Bemerkung zu (4.4) als T'^k-Fixpunkt annehmen (k wie im Beweis zu (4.4)). Die Folgen-Ordnungsstetigkeit von x' ergibt sich nun wie in '(b) $\Longrightarrow$ (c)' aus der Mittelergodizität von T^k und aus $\dim F(T^k) < \infty$.

(d) $\Longrightarrow$ (c): Sei $T'z' = z'$. Wegen $F^s(T')_+ = F(T')_+$ kann z' positiv angenommen werden. Da T folgen-ordnungsstetig ist, bleiben die folgen-ordnungsstetigen Linearformen auf E unter T' invariant. Wie in der Begründung nach der Bedingung (b) auf Seite 53 läßt sich zeigen, daß die nicht-folgen-ordnungsstetige Komponente y' von z' ebenfalls in $F(T')_+$ liegt.

Angenommen, es sei $y' \succ 0$. Ohne Einschränkung sei dann $\langle e, y'\rangle = 1$. Nach (1.2) gibt es zu δ ein $0 \leq x \leq e$,

für das $x \wedge e-x = 0$ gilt und das außerdem $\langle x,y'\rangle = 1$ sowie $\langle x,x'\rangle \leq \delta$ erfüllt. Nach den Voraussetzungen folgt daher $T^n x \leq \varepsilon e$, also $\langle T^n x,y'\rangle \leq \varepsilon\langle e,y'\rangle < 1$. Dies widerspricht $\langle T^n x,y'\rangle = \langle x,y'\rangle = 1$.

Bemerkungen. 1. Es seien $B(X,\mathcal{A})$ und T_φ wie auf Seite 78 beschrieben. Dann treffen auf $B(X,\mathcal{A})$ und T_φ die Voraussetzungen von (4.9) zu. Die Bedingung (d) von (4.9) gibt dann gerade die Doeblin-Bedingung (D) wieder.

Unter der Voraussetzung $\dim F(T_\varphi) = 1$ zeigte Lin in Theorem 5 von [19] die Äquivalenzen von (4.9). Die Gleichwertigkeit von (a) und (d) entnimmt er [29], V.3.2 Exercise. Bei der wesentlichsten Implikation '(b) $\Longrightarrow$ (a)' wendet Lin ein Ergebnis von Brunel und Revuz ([2], II.2 Theorem; siehe auch [32], VI.Theorem 3.10) an. Dieses Resultat über eine Harris-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem separablen Meßraum $(X,\mathcal{A})$ wird ebenso wie das von Lin durch (4.9) verallgemeinert (sogar für sub-markoffsches T). Die weiteren in [2] und [19] aufgeführten Bedingungen, etwa

(e) $(1_{B(X,\mathcal{A})}-T_\varphi)\, B(X,\mathcal{A})$ ist abgeschlossen,

(f) $(1_{ca(X,\mathcal{A})}-T'_\varphi)\, ca(X,\mathcal{A})$ ist abgeschlossen,

sind bereits erwähnt worden (Seite 72 , 80).

2. (4.9) enthält außerdem Andos Theorem 2 aus [1]. Ando betrachtet hierbei einen folgen-ordnungsstetigen Markoff-Operator T auf $C(K)$, K quasi-Stonesch. Er weist dann die Gleichwertigkeit von (b) und (c) nach. Wie aus (4.9) hervorgeht, gilt dies auch für sub-markoffsches T .

Der Nachweis '(b) $\Longrightarrow$ (c)' folgt hier dem von Ando angegebenen Weg. Wie der Beweis von '(c) $\Longrightarrow$ (a)' zeigt, kann - Andos Ergebnis vorausgesetzt - für einen Markoff-Operator T von (b) auf (a) geschlossen werden. Hierbei gehen dann nur (4.7) und (4.8) ein. Um aber aus (c) (unter der allgemeineren Voraussetzung $F^s(T')_+ = F(T')_+$) mit Hilfe von (4.7) und (4.8) direkt die Bedingung (a) zu folgern, wird die Endlichkeit der Dimension von $F(T')$ benötigt. Dazu teilte mir Lotz (1.3) mit.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Ando, T.: Invariante Masse positiver Kontraktionen in $C(X)$. Studia Math. 31, 173-187 (1968).

[2] Brunel, A.; Revuz, D.: Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité. Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. B, 10(3), 301-337 (1974).

[3] Derriennic, Y.; Lin, M.: On invariant measures and ergodic theorems for positive operators. J. of Functional Analysis 13, 252-267 (1973).

[4] Dunford, N.; Schwartz, J. T.: Linear Operators. Part I : General Theory. New York: Wiley 1958.

[5] Eberlein, W. F.: Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 67, 217-240 (1949).

[6] Feldman, J.: Integral kernels and invariant measures for Markoff transition functions. Ann. Math. Statist. 36, 517-523 (1965).

[7] Foguel, S. R.: The Ergodic Theory of Markov Processes. New York: Van Nostrand 1969.

[8] Foguel, S. R.: On the "zero-two" law. Israel J. Math. 10, 275-280 (1971).

[9] Foguel, S. R.: More on the "zero-two" law. Proc. Amer. Math. Soc. 61(2), 262-264 (1976).

[10] Fortet, R.: Condition de Doeblin et quasi-compacité. Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. B, 14(4), 379-390 (1978).

[11] Fréchet, M.: Sur l'allure asymptotique de densités itérées dans le problème de probalilités 'en chaine'. Bull. Soc. Math. France 62, 68-83 (1934).

[12] Frobenius, G.: Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1912, 456-477.

[13] Horowitz, S.: Transition probabilities and contractions of L_∞. Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 24, 263-274 (1972).

[14] Jacobs, K.: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1960.

[15] Kakutani, S.; Yosida, K.: Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem. Ann. of Math. 42, 188-228 (1941).

[16] Karlin, S.: Positive operators. J. Math. Mech. 8, 907-937 (1959).

[17] Krieger, H. J.: Beiträge zur Theorie positiver Operatoren. Schriftenreihe der Institute für Math., Reihe A, Heft 60, Berlin: Akademie-Verlag 1969.

[18] Lin, M.: On the uniform ergodic theorem. Proc. Amer. Math. Soc 43(2), 337-340 (1974).

[19] Lin, M.: Quasi-compactness and uniform ergodicity of Markov operators. Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. B, 10(4), 345-354 (1975).

[20] Lin, M.: Quasi-compactness and uniform ergodicity of positive operators. Israel J. Math. 29, 309-311 (1978).

[21] Lotz, H. P.: Über das Spektrum positiver Operatoren. Math. Z. 108, 15-32 (1968).

[22] Moy, S.-T. C.: λ-continuous Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc. 117, 68-91 (1965).

[23] Moy, S.-T. C.: λ-continuous Markov chains II. Trans. Amer. Math. Soc. 120, 83-107 (1965).

[24] Moy, S.-T. C.: Period of an irreducible operator. Illinois J. Math 11, 24-39 (1967).

[25] Nagel, R. J.: Mittelergodische Halbgruppen linearer Operatoren. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 23(4), 75-87 (1973).

[26] Nagel, R. J.: Ergodic and mixing properties of linear operators. Proc. Royal Irish Acad. Sect A, 74, 245-261 (1974).

[27] Nagel, R. J.; Schlotterbeck, U.: Integraldarstellung regulärer Operatoren auf Banachverbänden. Math. Z. 127, 293-300 (1972).

[28] Nagel, R. J.; Schlotterbeck, U.: Kompaktheit von Integraloperatoren auf Banachverbänden. Math. Ann. 202, 301-306 (1973).

[29] Neveu, J.: Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. Paris: Masson et C^{ie} 1964.

[30] Ornstein, D.; Sucheston, L.: An operator theorem on L_1 convergence to zero with applications to Markov kernels. Ann. Math. Statist. 41, 1631-1639 (1970).

[31] Revuz, D.: Markov Chains. Amsterdam-Oxford: North Holland Publishing Company 1975.

[32] Sato, R.: An individual ergodic theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 65(2), 235-241 (1977).

[33] Schaefer, H. H.: Topological Vector Spaces. dritte Auflage, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1971

[S] Schaefer, H. H.: Banach Lattices and Positive Operators. Grundl. Math. Wiss. Vol. 215, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1974.

[34] Schaefer, H. H.: On positive contractions in L^p-spaces. Vorabdruck.

[35] Takeo, F.: On proper spaces of some positive operators with the property (W). Nat. Sci. Report, Ochanomizu Univ. 27(2), 89-97 (1976).

[36] Wolff, M.: Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in Banach-Verbänden. Math. Ann. 184, 49-55 (1969).

LEBENSLAUF

27. Februar 1950	Detlef Axmann, geboren in Korbach als Kind von Erich Axmann und Edeltraut Axmann, geborene Ruse,
1956-1960	Volksschule Marker-Breite in Korbach,
1960-1966	Realschule Korbach,
1966-1968	Alte Landesschule Korbach, Abitur im Juni 1968,
1968	Beginn des Mathematikstudiums, nach einem Semester Unterbrechung durch den Wehrdienst,
1969-1975	Mathematikstudium, davon
1969-1971	an der Ruhr-Universität Bochum mit Nebenfach Physik,
1971-1975	an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen, mit Nebenfach Biologie,
Juni 1975	Diplomprüfung in Mathematik,
1976-1978	Graduiertenförderung

Meine akademischen Lehrer in Bochum waren die Herren Gänßler, Kamke, Kellerer, Reiffen, Schempp,
in Tübingen die Herren Beekmann, Hadeler, Kaup, Kowitz, Nagel, Schaefer, Varjú und Zeller.